

## Feuille d'exercices 19.

### Corrigé de quelques exercices.

#### Exercice 19.9 :

1°) Soit  $y$  une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Notons  $(H)$  l'équation sans second membre associée à  $(E)$ . Alors d'après le cours,

$$(H) \iff y(x) = \lambda e^{-B(x)} \text{ où } B(x) = \int_0^x b(t) dt.$$

On applique la méthode de variation de la constante en posant  $y(x) = \lambda(x)e^{-B(x)}$ . Alors d'après le cours,  $(E) \iff \lambda'(x)e^{-B(x)} = c(x)$ , donc la solution générale de  $(E)$  est  $y(x) = e^{-B(x)} \left( \int_0^x c(t)e^{B(t)} dt + k \right)$ .

2°) a) Si  $y$  est  $T$ -périodique, on a bien sûr  $y(0) = y(T)$ .

Réciproquement, supposons que  $y(0) = y(T)$ .

Posons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z(x) = y(x+T)$ .  $b$  et  $c$  étant  $T$ -périodiques, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z'(x) + b(x)z(x) = y'(x+T) + b(x+T)y(x+T) = c(x+T) = c(x)$ , donc  $z$  est solution de  $(E)$  et elle vérifie  $z(0) = y(T) = y(0)$ . Ainsi  $z$  et  $y$  sont deux solutions d'un même problème de Cauchy associé à  $(E)$ , donc  $y$  et  $z$  sont égales. Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = z(x) = y(x+T)$ , donc  $y$  est  $T$ -périodique.

b) Soit  $y$  une solution de  $(E)$ . D'après la question 1, il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = e^{-B(x)} \left( \int_0^x c(t)e^{B(t)} dt + k \right)$ . Alors  $y$  est  $T$ -périodique si et seulement si

$$(1) : y(0) = y(T).$$

$$(1) \iff k = e^{-B(T)} \left( \int_0^T c(t)e^{B(t)} dt + k \right) \iff k(1 - e^{-B(T)}) = e^{-B(T)} \int_0^T c(t)e^{B(t)} dt.$$

Supposons que  $B(T) \neq 0$ , où  $B(T) = \int_0^T b(t) dt$ . Alors  $1 - e^{-B(T)} \neq 0$ ,

$$\text{donc } (1) \iff k = \frac{e^{-B(T)} \int_0^T c(t)e^{B(t)} dt}{1 - e^{-B(T)}}, \text{ donc } (E) \text{ admet une unique solution } T\text{-périodique.}$$

Supposons que  $B(T) = 0$ . Alors  $(1) \iff 0 = \int_0^T c(t)e^{B(t)} dt$ . Cette condition ne dépend plus de  $k$ . Si  $\int_0^T c(t)e^{B(t)} dt \neq 0$ , alors il n'existe aucun  $k \in \mathbb{R}$  tel que (1), donc

---

(E) n'admet aucune solution  $T$ -périodique. Si  $\int_0^T c(t)e^{B(t)} dt = 0$  alors (1) est vérifié pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , donc toutes les solutions de (E), en nombre infini sont  $T$ -périodiques. En conclusion, il existe une unique solution  $T$ -périodique de (E) si et seulement si  $\int_0^T b(t) dt \neq 0$ .

**Exercice 19.14 :**

Notons (H) :  $y'' + 6y' + 9y = 0$ . Il s'agit de l'équation homogène associée à (E). Son polynôme caractéristique est  $\chi(X) = X^2 + 6X + 9 = (X + 3)^2$ , donc  $t \mapsto e^{-3t}$  est une solution de (H) qui ne s'annule jamais.

Soit  $y$  une application deux fois dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Conformément au cours, on va résoudre (E) en posant  $y(t) = \lambda(t)e^{-3t}$ . Ainsi,

$$(E) \iff 9\lambda e^{-3t} + 6(\lambda' - 3\lambda)e^{-3t} + e^{-3t}(\lambda'' - 3\lambda' - 3(\lambda' - 3\lambda)) = \frac{e^{-3t}}{\sqrt{1+t^2}}, \text{ donc}$$

$$(E) \iff \lambda'' = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \lambda' = \operatorname{argsh}(t) + \alpha.$$

Par intégration par parties,

$$\int \operatorname{argsh}(t) dt = t \operatorname{argsh}(t) - \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = t \operatorname{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2} + \beta,$$

donc (E)  $\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = t \operatorname{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2} + \alpha t + \beta$ , puis

$$(E) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{-3t}(\alpha t + \beta + t \operatorname{argsh}(t) - \sqrt{1+t^2}).$$

**Exercice 19.16 :**

◇ **Lemme :** Soit  $g$  et  $h$  deux applications de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f = g \iff (f' = g' \text{ et } f(0) = g(0))$ .

En effet, le sens direct est évident, et si  $f' = g'$  et  $f(0) = g(0)$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = g(0) + \int_0^x g'(t) dt = g(x).$$

◇ Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Notons (E) l'équation fonctionnelle de l'énoncé. En posant  $u = x - t$  dans l'intégrale, on obtient :

$$(E) \iff f(x) = x^2 + \int_0^x (x-u)f(u) du, \text{ donc}$$

$$(E) \iff f(x) = x^2 + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du.$$

◇ Supposons que  $f$  est solution de (E). Alors  $x \mapsto \int_0^x f(u) du$  et  $x \mapsto \int_0^x u f(u) du$

sont de classe  $C^1$ , donc  $f$  est aussi de classe  $C^1$ . Mais alors  $x \mapsto \int_0^x f(u) du$  et

$x \mapsto \int_0^x u f(u) du$  sont de classe  $C^2$ , donc  $f$  est de classe  $C^2$ . Ainsi, on peut se

contenter de rechercher les solutions de (E) parmi les fonctions de classe  $C^2$ .

◇ Soit donc  $f$  une application de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . D'après le lemme,

(E)  $\iff [f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = 2x + xf(x) + \int_0^x f(u) du - xf(x)]$ , puis en utilisant à nouveau le lemme, (E)  $\iff [f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ et } f''(x) = 2 + f(x)]$ .

Notons (F) :  $f'' = 2 + f \iff (f + 2)'' = f + 2$ .

D'après le cours, (F)  $\iff f + 2 = Achx + Bshx$ . Alors

(E)  $\iff [\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Achx + Bshx - 2 \text{ et } 0 = A - 2, 0 = B]$ ,

donc (E)  $\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2(chx - 1)$ .

**Exercice 19.17 :**

1°) *Première solution :*  $y'' = -|y| \leq 0$  donc  $y'$  est une application décroissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $y'(0) = 0$ , donc  $y'$  est positive sur  $\mathbb{R}_-$  et négative sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit le

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
tableau de variations suivant. $y'(x)$	$+$	$0$	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	$a$	$\searrow$

En particulier,  $\forall x \in \mathbb{R} \ y(x) \leq a$ .

*Seconde solution :*  $y'' = -|y| \leq 0$  donc  $y$  est concave, donc d'après le cours, le graphe de  $y$  est situé sous sa tangente en 0, qui correspond à la droite d'équation  $y = a$ , car  $y(0) = a$  et  $y'(0) = 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}, y(x) \leq a$ .

2°) Dans ce cas, pour tout  $x \in \mathbb{R}, y(x) \leq 0$ , donc  $y''(x) - y(x) = 0$ .

On en déduit qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $y(x) = \alpha ch(x) + \beta sh(x)$ . Or  $y(0) = a$  et  $y'(0) = 0$ , donc  $\alpha = a$  et  $\beta = 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}, \boxed{y = ach(x)}$ .

3°)  $\diamond$  Supposons que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+, y(x) > 0$ . Alors  $y|_{\mathbb{R}_+}$  est solution de l'équation différentielle  $f'' + f = 0$ , donc il existe  $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+, y(x) = A \cos(x + \varphi)$ , mais c'est impossible car l'application  $x \mapsto \cos(x + \varphi)$  n'est pas de signe constant sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi  $y$  prend des valeurs négatives sur  $\mathbb{R}_+$ , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $b_+ > 0$  tel que  $y(b_+) = 0$ .

$\diamond$  Supposons qu'il existe  $c_+ \in \mathbb{R}_+$  tel que  $y(c_+) = 0$  avec  $c_+ \neq b_+$ .  $y$  étant monotone sur  $[b_+, c_+]$ , elle est constante sur cet intervalle, donc  $y'(b_+) = 0 = y'(0)$ , mais  $y'$  est monotone sur  $[0, b_+]$ , donc elle est constante sur cet intervalle. On en déduit que  $0 = y''(0) = -|y(0)| = -a$ , ce qui est faux.

On a donc montré qu'il existe un unique  $b_+ > 0$  tel que  $y(b_+) = 0$ .

De même, on montre qu'il existe un unique  $b_- < 0$  tel que  $y(b_-) = 0$ .

4°) On dispose ainsi du tableau de variations suivant.

$x$	$-\infty$	$b_-$	$0$	$b_+$	$+\infty$
$y'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$y(x)$		$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$a$
		$\searrow$	$0$	$\searrow$	$0$

$\diamond$  Pour tout  $x \in [b_-, b_+]$ ,  $y''(x) + y(x) = 0$ , donc il existe  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in [b_-, b_+]$ ,  $y(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ .

$y(0) = a$  et  $y'(0) = 0$ , donc  $A = a$  et  $B = 0$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [b_-, b_+]$ ,  $y(x) = a \cos(x)$ .

Or,  $y(b_+) = 0$  et, pour tout  $x \in [0, b_+[$ ,  $y(b_+) > 0$ , donc  $b_+ = \frac{\pi}{2}$ . De même,  $b_- = -\frac{\pi}{2}$ .

---

◇ Pour tout  $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$ ,  $y''(x) - y(x) = 0$ , donc il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$ ,  $y(x) = \alpha \operatorname{sh}x + \beta \operatorname{ch}x$ .

$y$  est continue et dérivable en  $\frac{\pi}{2}$ , or sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $y(x) = a \cos x$ ,

donc  $0 = y(\frac{\pi}{2}) = \alpha \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} + \beta \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} : (1)$ .

De plus,  $-a = -a \sin(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = \alpha \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + \beta \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} : (2)$ .

En formant  $(2) \times \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} - (1) \times \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$ , on obtient  $\alpha = -a \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}$ , d'où l'on déduit que  $\beta = a \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$ .

Ainsi, sur  $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ ,  $y(x) = a(-\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \operatorname{sh}x + \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch}x) = a \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2} - x)$ .

◇ Un calcul analogue sur  $] -\infty, -\frac{\pi}{2}]$  montre que  $y(x) = \begin{cases} a \operatorname{sh}(x + \frac{\pi}{2}) & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cos(x) & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2} - x) & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$