

DM 46

Problème 1

Partie I

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, lorsque f est i fois dérivable sur \mathbb{R} , on note $f^{(i)}$ la dérivée i -ème de f .

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, lorsque $f^{(i)}$ est définie et bornée sur \mathbb{R} , on note $M_i = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$.

1°) Pour cette seule question, on suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, calculer M_i .

2°) On suppose que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

On suppose également que f et f'' sont bornées sur \mathbb{R} .

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$.

En déduire que f' est bornée et que $M_1 \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.

3°) Lorsque f est de classe C^2 et que f et f'' sont bornées sur \mathbb{R} ,
montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.

4°) Montrer de même que, si f est de classe C^3 sur \mathbb{R} et que f et $f^{(3)}$ sont bornées
sur \mathbb{R} , alors $M_1 \leq \frac{1}{2} (9M_0^2 M_3)^{1/3}$.

f'' est-elle également bornée sur \mathbb{R} ?

Partie II

Dans toute cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f est une
application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^n , telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur \mathbb{R} .

5°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, lorsque x tend vers 0,

$$(e^x - 1)^m = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^j \right) \frac{x^j}{j!} + o(x^m).$$

En déduire que $\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{1, \dots, m-1\} \\ m! & \text{lorsque } j = m \end{cases}$.

6°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \right| \leq \frac{M_n h^n}{n!} + 2M_0$.

À l'aide de la question 5, montrer que $f^{(n-1)}$ est bornée sur \mathbb{R} .

Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, M_k est bien défini.

7°) Lorsque f n'est pas constante, montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $M_k > 0$.

8°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite croissante de réels strictement positifs. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $(s_1 s_2 \dots s_k)^n \leq (s_1 s_2 \dots s_n)^k$.

9°) En déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$.

Indication : on pourra poser $s_k = 2^{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}}$,

Problème 2

Dans tout ce problème, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de réels.

Lorsque $(s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$, on définit la suite réelle $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont s_0 et s_1 et dont les autres termes sont donnés par la relation de récurrence suivante : pour tout $n \geq 1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n-1} s_{n-1}$.

Partie I

1°) On suppose pour cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. On suppose de plus que $s_0 \geq 0$ et $s_1 > 0$.

a) Préciser le sens de variation de la suite $(s_n)_{n \geq 1}$.

b) Pour tout $n \geq 2$, montrer que $s_{n+1} \leq s_n e^{a_{n-1}}$.

c) Montrer que la suite (s_n) et la série $\sum a_n$ ont la même nature.

2°) On suppose pour cette question que la série $\sum a_n$ est absolument convergente et on considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = |s_0|, v_1 = |s_1| \text{ et, pour } n \geq 1, v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}| v_{n-1}.$$

Comparer $|s_n|$ et v_n .

Montrer que la série $\sum |s_{n+1} - s_n|$ converge puis que la suite (s_n) est convergente.

3°) On suppose dans cette question que $a_n = a^n$, où a est un réel de l'intervalle $]0, 1[$, et que la limite L de la suite (s_n) est non nulle.

En fonction de L et de a , déterminer un équivalent de $s_{k+1} - s_k$ puis un équivalent de $L - s_n$.

4°) On suppose dans cette question que $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et que la limite L de la suite (s_n) est non nulle.

a) Montrer que $L - s_n \sim \frac{L}{n}$.

b) Déterminer un équivalent de $s_n - L + \frac{L}{n}$ en fonction de L .

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que a_n est strictement positif pour tout entier naturel n et que la série $\sum a_n$ est convergente. On note $L(s_0, s_1)$ la limite de la suite (s_n) .

5°) Montrer que L est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $(s_0, s_1) \neq (0, 0)$.

6°) Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $s_m = 0$, alors $L(s_0, s_1) \neq 0$.

7°) Montrer que $\text{Ker}(L) \neq \mathbb{R}^2$ et que $\text{Ker}(L) \neq \{0\}$.

Ainsi $\text{Ker}(L)$ est une droite vectorielle de \mathbb{R}^2 (on ne demande pas de le démontrer). On dira que la suite (s_n) est alternée si $s_n s_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8°) Montrer que le couple de réels (s_0, s_1) est dans $\text{Ker}(L)$ si et seulement si la suite (s_n) est alternée.

9°) Lorsqu'on impose la condition $(s_0, s_1) \in \text{Ker}(L)$, montrer que le rapport $r_0 = -\frac{s_1}{s_0}$ ne dépend pas de (s_0, s_1) .

10°) On suppose dans cette question que le couple (s_0, s_1) appartient à $\text{Ker}(L)$ et on pose $r_n = -\frac{s_{n+1}}{s_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ et $0 < r_n < a_n$.

Déterminer la nature des séries $\sum r_n$, $\sum s_n$ et $\sum |s_n|$.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction

$f_n : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f_n(x) = \frac{a_n}{1+x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n$ et $p_n = g_n(0)$.

11°) Etablir que f_n et g_n sont monotones et dérivables.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|g'_n(x)| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $|p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.

12°) Montrer que $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} r_0$.