

DM 47. Corrigé

Problème 1 : une équation aux dérivées partielles

1°) a) $\frac{\partial r}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$

b) D'après la formule de dérivation d'une composée de fonctions,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u(r(x, y, z))}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} u'(r(x, y, z)), \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r} u'(r).$$

Ensuite, d'après la formule de dérivation d'un produit,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r} u'(r) + x \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{-1}{r^2} \right) u'(r) + \frac{x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} u''(r) = \frac{1}{r} u'(r) - \frac{x^2}{r^3} u'(r) + \frac{x^2}{r^2} u''(r).$$

Ainsi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2}{r^3} u'(r) + \frac{x^2}{r^2} u''(r).$

c) Par symétrie des rôles joués par x, y et z ,

on obtient que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2 + z^2}{r^3} u'(r) + \frac{y^2}{r^2} u''(r)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^3} u'(r) + \frac{z^2}{r^2} u''(r),$

donc $\Delta f = \frac{2}{r} u'(r) + u''(r).$

2°) a) Ainsi, $(E_\omega) \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^*, \frac{2}{r} u'(r) + u''(r) + \omega^2 u(r) = 0.$

Or $v'(t) = u(t) + tu'(t)$ et $v''(t) = 2u'(t) + tu''(t)$, donc

$$(E_\omega) \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, 2u'(t) + tu''(t) + \omega^2 tu(t) = 0 \iff v'' + \omega^2 v = 0.$$

b) D'après le cours, $(E_\omega) \iff \exists A, B \in \mathbb{R}, v(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$

donc $(E_\omega) \iff \exists A, B \in \mathbb{R}, u(t) = A \frac{\cos(\omega t)}{t} + B \frac{\sin(\omega t)}{t}.$

Or, lorsque t tend vers 0 par valeurs positives, $\frac{\sin(\omega t)}{t} = \omega \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \omega$

et $\left| \frac{\cos(\omega t)}{t} \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$, donc $f = u \circ r$ est une solution non nulle de (E_ω) telle que

$u(t)$ possède une limite finie lorsque t tend vers 0 si et seulement si u est de la forme

$$t \mapsto B \frac{\sin(\omega t)}{t} \text{ avec } B \neq 0.$$

3°) a) On suppose maintenant qu'il existe $B \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u(t) = B \frac{\sin(\omega t)}{t}. \text{ Ainsi, } u'(t) = B \frac{t\omega \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{t^2}, \text{ puis } u'(1) = B(\omega \cos \omega - \sin \omega),$$

donc, B étant non nul, $u'(1) = 0 \iff \omega \cos \omega = \sin \omega.$

Si l'on suppose que $\cos \omega = 0$, alors $u'(1) = 0 \iff \sin \omega = 0 \implies 1 = \sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 0$, ce qui est faux. Ainsi, on peut supposer que $\cos \omega \neq 0$. Alors $u'(1) = 0 \iff \tan \omega = \omega$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n =]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$. Notons $f : x \mapsto \tan x - x$.

f est définie et dérivable sur I_n , avec $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$. De plus $f'(x)$ ne s'annule avec $x \in I_n$ que lorsque $x = (n+1)\pi$, donc f est strictement croissante sur I_n . Elle est donc injective et réalise ainsi une bijection de I_n sur $f(I_n)$. De plus les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2} + n\pi$ et $\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$, car \tan est π -périodique. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I_n) = \mathbb{R}$. f est ainsi une bijection de I_n dans \mathbb{R} . En particulier, il existe $\omega_n \in I_n$ tel que $f(\omega_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $\tan \omega_n = \omega_n$.

c) On suppose dans cette question qu'il existe $B_n, B_p \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$u_n(t) = B_n \frac{\sin(\omega_n t)}{t} \text{ et } u_p(t) = B_p \frac{\sin(\omega_p t)}{t}.$$

◇ *Première méthode :*

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt &= B_n B_p \int_0^1 \sin(\omega_n r) \sin(\omega_p r) dr \\ &= B_n B_p \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\cos((\omega_n - \omega_p)r) - \cos((\omega_n + \omega_p)r) \right) dr \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((\omega_n - \omega_p)r)}{\omega_n - \omega_p} - \frac{\sin((\omega_n + \omega_p)r)}{\omega_n + \omega_p} \right]_0^1 \\ &= \frac{D}{2(\omega_n^2 - \omega_p^2)}, \text{ où} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (\omega_n + \omega_p)(\sin \omega_n \cos \omega_p - \cos \omega_n \sin \omega_p) - (\omega_n - \omega_p)(\sin \omega_n \cos \omega_p + \cos \omega_n \sin \omega_p) \\ &= -2\omega_n \cos \omega_n \sin \omega_p + 2\omega_p \cos \omega_p \sin \omega_n, \end{aligned}$$

or $\omega_n \cos \omega_n = \sin \omega_n$ et $\omega_p \cos \omega_p = \sin \omega_p$, donc $D = 0$, puis $\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt = 0$.

◇ *Seconde méthode :*

$v_n'' + \omega_n^2 v_n = 0$, donc $-\omega_n^2 \int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt = \int_0^1 v_n''(t)v_p(t) dt$. En intégrant par

parties, $-\omega_n^2 \int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt = [v_n'(r)v_p(r)]_0^1 - \int_0^1 v_n'(r)v_p'(r) dr$.

Or $v_p(r) = B_r \sin(\omega_p r)$, donc $v_p(0) = 0$. De plus, $v_n'(r) = u_n(r) + r u_n'(r)$, donc $v_n'(1) = u_n(1) + u_n'(1) = u_n(1) = v_n(1)$.

Ainsi, $-\omega_n^2 \int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt = v_n(1)v_p(1) - \int_0^1 v_n'(r)v_p'(r) dr$.

Cette dernière expression est symétrique en fonction de (n, p) ,

donc $-\omega_n^2 \int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt = -\omega_p^2 \int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt$, or $\omega_n^2 \neq \omega_p^2$, donc on retrouve

que $\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt = 0$.

4°) a) $\omega_n - (n+1)\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\omega_n - (n+1)\pi = \arctan(\tan(\omega_n - (n+1)\pi))$, or l'application \tan est π -périodique, donc $\omega_n - (n+1)\pi = \arctan(\tan(\omega_n)) = \arctan \omega_n$.

De plus, sur \mathbb{R}_+^* , $\frac{d}{dx} \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$, donc cette application est constante, puis en l'évaluant en 1, on obtient que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\omega_n - (n+1)\pi = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\omega_n} \right)$, donc $\omega_n = n\pi + \frac{3\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\omega_n} \right)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{2} + n\pi \leq \omega_n \leq \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi$, donc $\frac{1}{2n} + 1 \leq \frac{\omega_n}{n\pi} \leq \frac{3}{2n} + 1$. Les deux suites minorante et majorante tendent toutes les deux vers 1, donc d'après le principe des gendarmes, $\frac{\omega_n}{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi $\omega_n \sim n\pi$.

On en déduit que $\frac{1}{\omega_n} \sim \frac{1}{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\arctan \left(\frac{1}{\omega_n} \right) \sim \frac{1}{\omega_n} \sim \frac{1}{n\pi}$. Ceci signifie que $\arctan \left(\frac{1}{\omega_n} \right) = \frac{1}{n\pi} + o \left(\frac{1}{n} \right)$.

Ainsi, d'après la question précédente, $\omega_n = n\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o \left(\frac{1}{n} \right)$.

Problème 2 : La variole

Partie I : L'espérance de vie.

1°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Utilisons les notations de la question suivante : pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, on note A_k le point de coordonnées $(a + k\frac{b-a}{N}, 0)$ et B_k le point de coordonnées $(a + k\frac{b-a}{N}, f(a + k\frac{b-a}{N}))$.

Sur un schéma (à faire), on voit que la quantité $\frac{b-a}{N} f(a + k\frac{b-a}{N})$ est l'aire du rectangle de base l'intervalle $\left[a + k\frac{b-a}{N}, a + (k+1)\frac{b-a}{N} \right]$ et de hauteur le segment $[A_k, B_k]$. Lorsque N est grand, la réunion de ces rectangles épouse de mieux en mieux la surface située entre l'axe Ox et le graphe de f . Or ces rectangles ne se chevauchent pas, donc S_N représente l'aire de leur réunion. Il est donc concevable que $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

2°) Sur un schéma (à faire), on voit que les trapèzes $A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$ approchent le graphe de f encore mieux que les rectangles précédents. La somme des aires de ces trapèzes constitue ainsi une bonne valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$. L'aire du trapèze

$A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$ est égale à $\frac{b-a}{2N} \left(f(a + k\frac{b-a}{N}) + f(a + (k+1)\frac{b-a}{N}) \right)$, donc leur somme

vaut $T_N = \frac{b-a}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(a + k\frac{b-a}{N}) + f(a + (k+1)\frac{b-a}{N}) \right)$, que l'on peut écrire sous

la forme $T_N = \frac{b-a}{2N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\frac{b-a}{N}) + \sum_{k=1}^N f(a + k\frac{b-a}{N}) \right)$. Ainsi, on obtient bien

$$\text{que } T_N = \frac{b-a}{N} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + k \frac{b-a}{N}\right) \right).$$

3°) \diamond Fixons une durée Δx . $P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)$ représente le nombre d'individus morts entre $k\Delta x$ et $(k+1)\Delta x$. Si un individu meurt à un instant $t \in [k\Delta x, (k+1)\Delta x]$, on approche la date de sa mort par la date $k\Delta x$. C'est acceptable, informellement, si Δx est suffisamment petit. Alors la moyenne des durées de vie des P_0 individus initiaux, pondérée par le nombre d'individus accédant à chacune de ces durées de vie est égale

$$\text{à } E = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 1} k\Delta x \times \frac{P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)}{P_0}.$$

Lorsque $k > \lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 1$, $k > \frac{T}{\Delta x}$, donc $k\Delta x > T$ et $P(k\Delta x) = 0$. Il est donc normal d'arrêter la somme à ce niveau.

\diamond Posons $b = T + 1$ et $a = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $\Delta x = \frac{b-a}{N}$. On suppose N suffisamment grand pour que $\Delta x \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, $N\Delta x = b - a = T + 1$, or $(\lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 2)\Delta x \leq T + 2\Delta x \leq T + 1$, donc $N \geq \lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 2$

$$\text{et } E = \frac{1}{P_0} \sum_{k=0}^{N-1} \left(k \frac{b-a}{N} \right) \frac{P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)}{\Delta x} \times \frac{b-a}{N}.$$

Δx est supposé suffisamment petit pour qu'une valeur approchée de

$\frac{P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)}{\Delta x}$ soit $-P'(k \frac{b-a}{N})$. Ainsi, en posant $f(x) = xP'(x)$ pour tout x ,

on obtient $E = -\frac{1}{P_0} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + k \frac{b-a}{N}\right)$. D'après la première question, une bonne

définition mathématique de E est $E = -\frac{1}{P_0} \int_0^b xP'(x)dx = -\frac{1}{P_0} \int_0^{+\infty} xP'(x)dx$.

4°) a) Intégrons par parties : $-P_0 E = [xP(x)]_0^b - \int_0^b P(x) dx$, or $P(b) = 0$, donc

$$E = \frac{1}{P_0} \int_0^{+\infty} P(x) dx.$$

b) On applique la question 2, avec $a = 0$ et $b = N$, où N est supérieur à 150, de sorte que pour tout $n \geq N$, $P(n) = 0$. Ainsi, une valeur approchée de E est donnée par

$$\tilde{E} = \frac{1}{P_0} \frac{N-0}{N} \left(\frac{P(0) + P(N)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} P(k) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{P_0} \sum_{k=1}^{+\infty} P(k).$$

Partie II : Équations différentielles.

5°) a) $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, or entre x et $x + \Delta x$, en moyenne, parmi les $S(x)$ individus, $m(x)\Delta x S(x)$ vont mourir et $qS(x)\Delta x$ vont attraper la variole.

Ainsi, $\Delta S = -qS(x)\Delta x - m(x)S(x)\Delta x$.

Donc $-(m(x) + q)S(x) = \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} S'(x)$, si bien que lorsque Δx est suffisamment petit, on peut affirmer que S est une solution de l'équation différentielle

$(E_S) : S' = -(m(x) + q)S$.

b) De la même façon, entre x et $x + \Delta x$, en moyenne, parmi les $R(x)$ individus, $m(x)\Delta x R(x)$ vont mourir, mais dans le même temps, parmi les $qS(x)\Delta x$ individus qui viennent d'attraper la variole, une proportion de $1 - p$ d'entre eux va intégrer le groupe des $R(x)$ individus. Ainsi $R(x + \Delta x) - R(x) = (1 - p)qS(x)\Delta x - m(x)\Delta x R(x)$, donc R satisfait l'équation différentielle $(E_R) : R' = q(1 - p)S - m(x)R$.

6°) a) $f = \frac{S}{S + R}$, donc $f' = \frac{S'(S + R) - (S + R)'S}{(S + R)^2}$, or $(S + R)' = -m(S + R) - pqS$,

donc $(S + R)^2 f' = -(m + q)S(S + R) - S(-m(S + R) - pqS)$,

puis $(S + R)f' = -(m + q)S + mS + pq\frac{S^2}{S + R}$. Ceci montre que f satisfait l'équation différentielle $(E_f) : f' = -qf + pqf^2$.

b) \diamond On pose $g = \frac{1}{f}$. Ainsi $f' = -\frac{g'}{g^2}$, donc $-\frac{g'}{g^2} = -\frac{q}{g} + pq\frac{1}{g^2}$, puis $g' = qg - pq$.

\diamond g est donc solution de l'équation différentielle $(E) : y' = qy - pq$, dont l'équation homogène est $y' = qy$. La solution générale de l'équation homogène est $y = Ce^{qx}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus (E) admet comme solution particulière l'application constante $x \mapsto p$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = Ce^{qx} + p$.

De plus $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$, car $R(0) = 0$, donc $1 = C + p$. On a bien montré que

$$f(x) = \frac{1}{(1 - p)e^{qx} + p}.$$

c) On a supposé que $P(x)$ ne s'annulait pas pour définir $f(x)$. De plus, pour définir $g(x)$, on doit également supposer que $S(x)$ ne s'annule pas. Or $P(x) = 0 \implies S(x) = 0$, donc il suffit de supposer que, pour tout x , $S(x) > 0$.

7°) D'après (E_S) et d'après le cours, en notant M une primitive de m , il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) = Ce^{-qx - M(x)}$.

Alors (E_R) devient : $R' = q(1 - p)Ce^{-qx - M(x)} - m(x)R$, dont l'équation homogène est $(H_R) : R' = -m(x)R$.

On sait que $(H_R) \iff \exists D \in \mathbb{R}, De^{-M(x)}$. On utilise la méthode de variation de la constante en posant $R = D(x)e^{-M(x)}$. D'après le cours,

$(E_R) \iff D'(x)e^{-M(x)} = q(1 - p)Ce^{-qx - M(x)} \iff D'(x) = q(1 - p)Ce^{-qx}$, donc

$(E_R) \iff \exists D_0 \in \mathbb{R}, D(x) = D_0 + \int_0^x q(1 - p)Ce^{-qx} dx = D_0 + (p - 1)C(e^{-qx} - 1)$.

Il existe donc $C, D \in \mathbb{R}$ tels que $S(x) = Ce^{-qx - M(x)}$

et $R(x) = De^{-M(x)} + (p - 1)Ce^{-qx - M(x)}$.

On peut choisir pour M l'unique primitive de m qui s'annule en 0. Ainsi, lorsque $x = 0$, $S(0) = P_0 = C$ et $0 = R(0) = P_0(p - 1) + D$, donc $S(x) = P_0e^{-qx - M(x)}$ et $R(x) = P_0(1 - p)e^{-M(x)}(1 - e^{-qx})$.

En particulier, on obtient que, pour tout x , $S(x) > 0$: ce n'est pas réaliste, mais l'hypothèse sous laquelle on avait dû se placer lors de la question 6 n'est plus nécessaire. C'est une conséquence des calculs.

On retrouve bien que $f = \frac{S}{S+R} = \frac{e^{-qx}}{e^{-qx} + (1-p)(1-e^{-qx})} = \frac{1}{p + (1-p)e^{qx}}$.

Partie III : Les avantages de la vaccination.

8°) a) Entre x et $x + \Delta x$, le nombre d'individus atteints par la variole est égal à $q\Delta x S(x)$ et parmi ceux-ci, le nombre d'individus qui vont mourir de la variole est égal à $pq\Delta x S(x)$. Ainsi, si l'on pose $a = x$, $b = x + 1$, et $\Delta x = \frac{(x+1) - x}{N}$, où $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre de morts par la variole entre l'âge x et l'âge $x + 1$ est égal à

$\sum_{k=0}^{N-1} pq \frac{b-a}{N} S\left(a + k \frac{b-a}{N}\right)$, lequel d'après la question 1 correspond à la quantité $\int_x^{x+1} pqS(x) dx$. D'après la question 2, on peut approcher cette intégrale par l'aire du trapèze défini par les points de coordonnées $(x, 0)$, $(x, pqS(x))$, $(x+1, pqS(x+1))$ et $(x+1, 0)$, qui est égale à $\frac{1}{2}pq(S(x) + S(x+1))$.

b) Initialement, $P(0) = P_0 = S(0)$, $R(0) = 0$, le nombre de morts par la variole est nul et $P^*(0) = P_0$.

La table de mortalité permettant de connaître $P(n)$ pour tout entier naturel n est une donnée observable.

On sait que $f(n) = \frac{1}{p + (1-p)e^{qn}}$, donc on connaît également $f(n) = \frac{S(n)}{P(n)}$ et on en déduit $S(n)$, puis $R(n) = P(n) - S(n)$. Alors, le nombre de morts par la variole pendant l'année est évalué à $V(n) = \frac{1}{2}pq(S(n-1) + S(n))$.

Enfin, $P^*(n) = P^*(n-1) - (P(n-1) - P(n)) + V(n)$: On passe de $P^*(n-1)$ à $P^*(n)$ en enlevant tous les individus morts pendant l'année, sauf ceux qui sont morts de la variole, car ils ne seraient pas morts en cas de vaccination.

9°) Adaptons la solution de la question 3 pour calculer l'espérance de vie E' d'un individu du groupe initial de P_0 individus si l'on suppose qu'ils sont tous vaccinés et que le vaccin, administré à la naissance, entraîne le décès de $p'P_0$ individus dès la naissance : on obtient

$$E' = 0 \times p' + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 1} k\Delta x \times \frac{(1-p')[P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)]}{P_0}, \text{ donc } E' = (1-p')E^*.$$

Le vaccin est efficace si et seulement si $E' > E$, or

$$E' > E \iff (1-p')E^* > E \iff p' < 1 - \frac{E}{E^*}, \text{ ainsi le vaccin est efficace dès que } p' < 0,104.$$

Ce modèle est bien sûr critiquable sur plusieurs points :

- La définition de l'efficacité du vaccin est discutable : peut-on accepter la mort de $p'P_0$ individus dès leur naissance, quel que soit la valeur de $p' > 0$?
- La probabilité de contracter la variole dépend sans doute de l'âge des individus.
- Idem pour la probabilité de mourir de la variole lorsqu'elle est contractée.