

DM 48 : Corrigé

Problème 1 : Tétration

1°) Les théorèmes généraux nous disent que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Dès lors, d'après le théorème de Taylor-Young, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p un développement limité au voisinage de 1 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.

2°) On pose $x = 1 + h$, de sorte que h tend vers 0 lorsque x tend vers 1.

◇ $f_2(1+h) = (1+h)^{1+h} = e^{(1+h)\ln(1+h)} = e^{(1+h)(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3))}$, donc $f_2(1+h) = e^u$, où $u = h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3) = h\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. On calcule $u^2 = h^2(1+h+o(h))$ et $u^3 = h^3(1+o(1))$,

donc $f_2(1+h) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) = 1 + h + h^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + h^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + o(h^3)$.

En conclusion, $f_2(1+h) = 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + o(h^3)$.

◇ On en déduit que $f_3(1+h) = (1+h)^{f_2(1+h)} = e^{f_2(1+h)\ln(1+h)} = e^v$, où $v = h\left(1 + h + h^2 + o(h^2)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right) = h\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{5h^2}{6} + o(h^2)\right)$.

Ainsi, $f_3(1+h) = e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$, avec

$v = h\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{5h^2}{6} + o(h^2)\right)$, $v^2 = h^2(1+h+o(h))$ et $v^3 = h^3(1+o(1))$.

En conclusion, $f_3(1+h) = 1 + h + h^2 + \frac{3h^3}{2} + o(h^3)$.

3°) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'assertion $P(n)$ suivante :

Il existe $a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $p \geq n$,

$f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \dots + a_{n,n}h^n + o(h^n)$.

Initialisation : Pour tout $p \geq 0$, on a $f_p(1) = 1$, donc $f_p(1+h) = 1 + o(h)$. Cela démontre que $P(0)$ est vraie avec $a_{0,0} = 1$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie et démontrons $P(n+1)$. Soit $p \geq n$.

On a $f_{p+1}(1+h) = (1+h)^{f_p(1+h)} = e^{f_p(1+h)\ln(1+h)}$.

D'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, il existe des nombres réels $a_{n,0}, \dots, a_{n,n}$ tels que $f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \dots + a_{n,n}h^n + o(h^n)$.

Le développement de $\ln(1+h)$ à l'ordre $n+1$ nous donne

$$\begin{aligned}\ln(1+h) &= h - \frac{h^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1}) \\ &= h \left[1 - \frac{h}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{h^n}{n+1} + o(h^n) \right].\end{aligned}$$

En développant le produit de ces deux derniers développements limités, on obtient l'existence de nombres réels $b_{n+1,1}, b_{n+1,2}, \dots, b_{n+1,n+1}$ indépendants de p tels que $f_p(1+h) \ln(1+h) = h [b_{n+1,1} + b_{n+1,2}h + \cdots + b_{n+1,n+1}h^n + o(h^n)]$.

En composant ce développement limité avec celui de l'exponentielle en 0 à l'ordre $n+1$, on obtient l'existence de nombres réels $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n+1}$ indépendants de p tels que $e^{f_p(1+h) \ln(1+h)} = 1 + a_{n+1,1}h + a_{n+1,2}h^2 + \cdots + a_{n+1,n+1}h^{n+1} + o(h^{n+1})$.

En posant $a_{n+1,0} = 1$, on a donc

$$f_{p+1}(1+h) = a_{n+1,0} + a_{n+1,1}h + a_{n+1,2}h^2 + \cdots + a_{n+1,n+1}h^{n+1} + o(h^{n+1}).$$

Comme tous les $a_{n+1,j}$, pour $j \in \{0, \dots, n+1\}$, sont indépendants de p , cela démontre $P(n+1)$. Alors d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les assertions $P(n)$ et $P(n+1)$ utilisées pour $p = n+1$ nous disent respectivement que $f_{n+1}(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \cdots + a_{n,n}h^n + o(h^n)$

$$\text{et } f_{n+1}(1+h) = a_{n+1,0} + a_{n+1,1}h + \cdots + a_{n+1,n}h^n + o(h^n).$$

Alors, d'après l'unicité du développement limité, pour tout $k \leq n$, $a_{n+1,k} = a_{n,k}$.

Comme n est quelconque dans \mathbb{N} , on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n,k})_{n \geq k}$ est constante, égale à une valeur que l'on note a_k . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$ devient : $\forall p \geq n, f_p(1+h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + o(h^n)$.

5°) Pour $n = 3$, la question précédente nous dit que toutes les fonctions f_p pour $p \geq 3$ ont le même développement limité à l'ordre 3. Vu le résultat trouvé à la question 2,

$$\text{on peut donc affirmer que } f_{2023}(1+h) = 1 + h + h^2 + \frac{3h^3}{2} + o(h^3).$$

Problème 2 : une fonction nulle part dérivable

1°) \diamond Prenons $a = -1, b = 1$ et, pour tout $x \in [-1, 1], f(x) = |x|$.

Posons $n = 2, a_0 = -1, a_1 = 0$ et $a_2 = 1$. Alors $f|_{[a_0, a_1]} = -\text{Id}_{[-1, 0]}$, donc c'est une application dérivable et $f|_{[a_1, a_2]} = \text{Id}_{[0, 1]}$, donc c'est aussi une application dérivable.

f étant de plus continue, f satisfait les hypothèses de l'énoncé. Pourtant, f n'est pas dérivable en 0, car les dérivées à gauche et à droite en 0 sont différentes.

\diamond Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, posons $f_i = f|_{[a_{i-1}, a_i]}$.

$$|f(b) - f(a)| = |f(a_n) - f(a_0)| = \left| \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(a_{i-1})) \right|,$$

car la dernière somme est télescopique, donc d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |f_i(a_i) - f_i(a_{i-1})|.$$

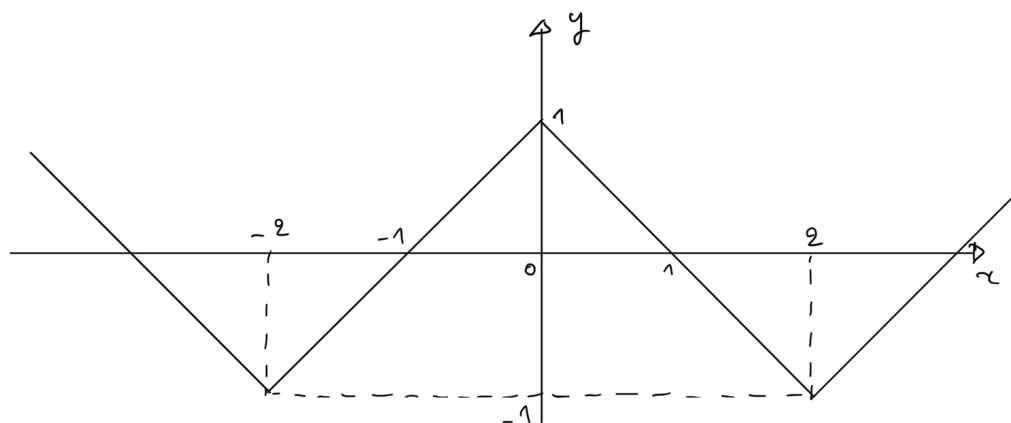
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à f_i entre a_{i-1} et a_i , qui est bien dérivable sur $[a_{i-1}, a_i]$, $|f_i(a_i) - f_i(a_{i-1})| \leq k|a_i - a_{i-1}| = k(a_i - a_{i-1})$,

donc $|f(b) - f(a)| \leq k \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = k(b-a)$, car c'est encore une somme télescopique.

2° \diamond . Pour $x \in [-2, 0]$, $g(x) = x + 1$. Son graphe sur $[-2, 0]$ est le segment de droite joignant les points $(-2, -1)$ et $(0, 1)$.

Pour $x \in [0, 2]$, $g(x) = 1 - x$. Son graphe sur $[0, 2]$ est le segment de droite joignant les points $(0, 1)$ et $(2, -1)$.

Ceci permet de représenter le graphe de g :



\diamond Le graphe montre que g est continue.

On va tout de même le démontrer rigoureusement.

Lorsque $x \in]-2, 2[$, $]-2, 2[$ est un voisinage de x sur lequel $g(t) = 1 - |t|$, donc g est continue en x . Par 4-périodicité, g est continue en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus (2 + 4\mathbb{Z})$.

Lorsque $x \in [1, 2[$, $g(x) = 1 - |x|$, donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} -1 = g(-2) = g(2)$ par 4-périodicité.

Lorsque $x \in]2, 3[$, $g(x) = g(x - 4) = 1 - |x - 4|$, donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} -1 = g(2)$. Ceci démontre que g est continue en 2. Alors, par 4-périodicité, g est continue en tout point de $2 + 4\mathbb{Z}$. En conclusion, on a montré que g est continue sur \mathbb{R} .

\diamond Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a < b$.

Posons $A = 2\mathbb{Z} \cap]a, b[$.

Premier cas : Supposons que $A = \emptyset$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $[a, b] \subset [2k, 2k + 2]$, donc d'après le graphe de g , $g|_{[a, b]}$ a pour graphe un segment de droite de pente 1 ou -1. Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, $\left| [g|_{[a, b]}]'(x) \right| = 1$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, $|g(b) - g(a)| \leq |b - a|$.

Second cas : Supposons que $A \neq \emptyset$. A est une partie bornée de \mathbb{Z} , donc elle est finie. Notons a_1, \dots, a_{n-1} ses éléments dans l'ordre croissant, avec $n = |A| + 1$. Posons également $a_0 = a$ et $a_n = b$. On est alors exactement dans la situation de la question précédente, avec $k = 1$. On peut donc affirmer que $|g(b) - g(a)| \leq |b - a|$.

3° Pour tout $x \in [-2, 2[$, $|g(x)| = |1 - |x||$: c'est la distance entre $|x| \in [0, 2]$ et 1, donc $|g(x)| \leq 1$. Alors, par 4-périodicité, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} x) \right| \leq \frac{1}{2^k}$, or la série géométrique $\sum \frac{1}{2^k}$

est convergente, donc la série $\sum \frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)} x)$ est absolument convergente, ce qui prouve que f est correctement définie sur \mathbb{R} en entier.

Cela prouve également que f est bornée, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1$.

4°) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x) - h_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h(x) - h_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

h_N est continue en x_0 , donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $|h_N(x_0) - h_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \alpha$. Alors, par inégalité triangulaire,

$|h(x_0) - h(x)| \leq |h(x_0) - h_N(x_0)| + |h_N(x_0) - h_N(x)| + |h_N(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Ceci démontre que h est continue en x_0 , pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)} x)$. D'après les théorèmes usuels, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)} x) \right|$, donc par inégalité

triangulaire et sachant que $|g|$ est majorée par 1, $|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$.

Ainsi, $\frac{1}{2^n}$ majore $\{|f(x) - f_n(x)| / x \in \mathbb{R}\}$. Ceci prouve que $f - f_n$ est bornée et que ce majorant est plus grand que la borne supérieure, car par définition cette dernière est le plus petit des majorants. Ainsi, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le principe des gendarmes, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On peut alors appliquer la question précédente et affirmer que f est continue sur \mathbb{R} .

6°) \diamond Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{(2^n)} x \in [2N, 2N + 2[$.

Si $2^{(2^n)} x \in [2N, 2N + 1[$, on peut choisir $\varepsilon_n = 1$.

Sinon, alors $2^{(2^n)} x \in [2N + 1, 2N + 2[$, et on peut choisir $\varepsilon_n = -1$.

\diamond Supposons d'abord que $k > n$. Alors $2^{2^k} h_n = \varepsilon_n 2^{2^k - 2^n}$,

or $2^k - 2^n \geq 2^{n+1} - 2^n = 2^n \geq 2$, donc $2^{2^k} h_n$ est un multiple de 4, mais g est de période 4, donc $\left| g\left(2^{2^k}(x + h_n)\right) - g\left(2^{2^k} x\right) \right| = 0$.

Supposons maintenant que $k = n$.

Alors $\left| g\left(2^{2^k}(x + h_n)\right) - g\left(2^{2^k} x\right) \right| = \left| g(\varepsilon_n + 2^{2^n} x) - g(2^{2^n} x) \right| = 1$, car il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{(2^n)} x$ et $2^{(2^n)} x + \varepsilon_n$ sont tous deux dans l'intervalle $[2N, 2N + 2[$, or sur cet intervalle, le graphe de g est un segment de droite de pente 1 ou -1 .

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \{0, \dots, n - 1\}$, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
\left| g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right| &\leq \left| 2^{2^k}h_n \right| \leq 2^{2^{n-1}}2^{-2^n} = 2^{-2^{n-1}} \text{ donc par inégalité trian-} \\
\text{gulaire, } \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right) \right| &\leq \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \right) 2^{-2^{n-1}} \leq 2^{-2^{n-1}}. \text{ Alors,} \\
\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| &= 2^{2^n} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right) \right| \\
&= 2^{2^n} \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right) \right| \\
&= 2^{2^n} |A - B|,
\end{aligned}$$

où $A = \frac{1}{2^n} \left| g\left(2^{2^n}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^n}x\right) \right|$ et $B = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right)$.
D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, $|A - B| \geq |A| - |B|$, or d'après la question précédente, $|A| = \frac{1}{2^n}$, donc

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| &\geq 2^{2^n} \left(\frac{1}{2^n} - \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right) \right| \right) \\
&\geq 2^{2^n} \left(2^{-n} - 2^{-2^{n-1}} \right) = 2^{2^n-n} \left(1 - 2^{n-2^{n-1}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Or h_n est une suite d'éléments de \mathbb{R}^* telle que $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après la caractérisation séquentielle

de la notion de limite de fonction, on a montré que, pour x fixé, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ n'admet pas de limite finie lorsque h tend vers 0 avec $h \in \mathbb{R}^*$. On a donc montré que f n'est pas dérivable en x , mais x est un réel quelconque, donc f est un exemple d'application définie et continue sur \mathbb{R} en entier, mais qui n'est dérivable nulle part.

Problème 3 : Version faible du théorème de Singer

Partie I : Fonctions à schwarziennegative.

1°) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'''(x)f'(x) - 3f''(x)^2 = 2 \times 0 \times (2ax + b) - 3 \times 4a^2 = -12a^2 < 0$, donc f appartient à \mathcal{E} .

2°) Comme f, g sont de classe \mathcal{C}^3 , il en va de même de la fonction $g \circ f$. On calcule successivement : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$, $(g \circ f)'' = f'' \times (g' \circ f) + f'^2 \times (g'' \circ f)$ et $(g \circ f)''' = f''' \times (g' \circ f) + 3f'' \times f' \times (g'' \circ f) + f'^3 \times (g''' \circ f)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{(s)} &= 2(g \circ f)^{(s)}(g \circ f)' - 3(g \circ f)^{(s)2} \\
&= 2(f^{(s)}(g' \circ f) + 3f''f'(g'' \circ f) + f'^3(g''' \circ f))(f'(g' \circ f)) \\
&\quad - 3(f''(g' \circ f) + f'^2(g'' \circ f))^2 \\
&= 2f^{(s)}f'(g' \circ f)^2 + 6f''f'^2(g'' \circ f)(g' \circ f) + 2f'^4(g''' \circ f)(g' \circ f) \\
&\quad - 3f''^2(g' \circ f)^2 - 6f''f'^2(g' \circ f)(g'' \circ f) - 3f'^4(g'' \circ f)^2 \\
&= 2f^{(s)}f'(g' \circ f)^2 + 2f'^4(g''' \circ f)(g' \circ f) \\
&\quad - 3f''^2(g' \circ f)^2 - 3f'^4(g'' \circ f)^2 \\
&= (g' \circ f)^2(2f^{(s)}f' - 3f''^2) + f'^4(2(g''' \circ f)(g' \circ f) - 3(g'' \circ f)^2) \\
&= (g' \circ f)^2(2f^{(s)}f' - 3f''^2) + f'^4[(2g'''g' - 3g''^2) \circ f],
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(g \circ f)^{(s)} = (g' \circ f)^2 f^{(s)} + f'^4(g^{(s)} \circ f)$.

3°) Soient $f, g \in \mathcal{E}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $(g \circ f)'(x) \neq 0$.

$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$, donc $f'(x) \neq 0$ et $g'(f(x)) \neq 0$.

Ainsi, $f \in \mathcal{E}$ et $f'(x) \neq 0$, donc $f^{(s)}(x) < 0$.

De plus $g \in \mathcal{E}$ et $g'(f(x)) \neq 0$, donc $g^{(s)}(f(x)) < 0$. Alors d'après la question précédente,

$$(g \circ f)^{(s)}(x) = \underbrace{(g' \circ f)^2(x)}_{>0} \times \underbrace{f^{(s)}(x)}_{<0} + \underbrace{f'^4(x)}_{>0} \times \underbrace{g^{(s)}(f(x))}_{<0} < 0.$$

Cela démontre que $g \circ f \in \mathcal{E}$.

4°) \diamond Comme $|f'|$ possède un minimum local en x_0 , la fonction $\varphi = (f')^2$ possède aussi un minimum local en x_0 . Or φ est dérivable au voisinage de x_0 , donc d'après le cours $\varphi'(x_0) = 0$.

\diamond Raisonnons par l'absurde en supposant que $\varphi''(x_0) < 0$. La formule de Taylor-Young appliquée à la fonction φ (de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}) en x_0 à l'ordre 2 nous dit que

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2),$$

donc pour h au voisinage de 0, $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \sim \frac{\varphi''(x_0)}{2}h^2 < 0$. Ceci démontre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $h \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$, $\varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0)$, c'est-à-dire que φ admet en x_0 un maximum local strict. C'est absurde ! Donc $\varphi''(x_0) \geq 0$.

\diamond Raisonnons à nouveau par l'absurde en supposant que $f'(x_0) \neq 0$.

Alors, comme $f \in \mathcal{E}$, (*) : $2f'''(x_0)f'(x_0) - 3f''(x_0)^2 = f^{(s)}(x_0) < 0$.

Par ailleurs, comme $\varphi'(x_0) = 2f''(x_0)f'(x_0)$ et $\varphi''(x_0) = 2f'''(x_0)f'(x_0) - 2f''(x_0)^2$, les conditions $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \geq 0$ établies précédemment impliquent que $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0)f'(x_0) \geq 0$, ce qui implique que (**): $2f'''(x_0)f'(x_0) - 3f''(x_0)^2 \geq 0$.

Les inégalités (*) et (**) sont contradictoires, donc $f'(x_0) = 0$.

Partie II : Points fixes attractifs

5°) La fonction $f : x \mapsto x^3$ possède exactement trois points fixes, à savoir 0, 1 et -1. Comme $f'(0) = 0$ et $f'(-1) = f'(1) = 3$, on voit que le seul point fixe attractif de f est 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{\circ n}(x) = x^{3^n}$ par récurrence immédiate.

Si $x \in]-1, 1[$, alors $x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, or (x^{3^n}) est une suite extraite de (x^n) , donc $f^{\circ n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Si $|x| \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{\circ n}(x)| \geq 1$, donc $f^{\circ n}(x)$ ne tend pas vers 0.

Par conséquent $B_f(0) =]-1, 1[$.

6°) Comme ℓ est un point fixe de f , une récurrence immédiate montre que la suite $(f^{\circ n}(\ell))_{n \geq 0}$ est la suite constante égale à ℓ . Elle converge bien vers ℓ . Donc $\ell \in B_f(\ell)$.

Notons \mathcal{I} l'ensemble des intervalles de \mathbb{R} contenant ℓ et inclus dans $B_f(\ell)$ et posons $I_f(\ell) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$. Ce qui précède montre que $\{\ell\} \in \mathcal{I}$, donc $\ell \in I_f(\ell)$. $I_f(\ell)$ est une réunion

d'intervalles possédant ℓ comme point commun, donc d'après le cours, $I_f(\ell)$ est aussi un intervalle. Par construction, c'est bien le plus grand intervalle contenant ℓ et inclus dans $B_f(\ell)$.

7°) \diamond Soit $y \in f(B_f(\ell))$. Il existe $x \in B_f(\ell)$ tel que $y = f(x)$.

$x \in B_f(\ell)$, donc $f^{\circ n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc $f^{\circ n}(y) = f^{\circ(n+1)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Ainsi, $y \in B_f(\ell)$.

Donc $f(B_f(\ell)) \subset B_f(\ell)$.

\diamond Soit $x \in f^{-1}(B_f(\ell))$. On a $f(x) \in B_f(\ell)$. Alors $f^{\circ n+1}(x) = f^{\circ n}(f(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc $f^{\circ n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Cela démontre que $x \in B_f(\ell)$. Donc $f^{-1}(B_f(\ell)) \subset B_f(\ell)$.

\diamond La fonction f est continue et $I_f(\ell)$ est un intervalle donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I_f(\ell))$ est un intervalle.

Comme $\ell \in I_f(\ell)$, on a $\ell = f(\ell) \in f(I_f(\ell))$.

Enfin, comme $I_f(\ell) \subset B_f(\ell)$, on a $f(I_f(\ell)) \subset f(B_f(\ell)) \subset B_f(\ell)$ d'après la question précédente.

Ainsi $f(I_f(\ell))$ est un intervalle de \mathbb{R} contenant ℓ et inclus dans $B_f(\ell)$. Et comme $I_f(\ell)$ est, par définition, le plus grand intervalle de \mathbb{R} contenant ℓ et inclus dans $B_f(\ell)$, on en déduit que $f(I_f(\ell)) \subset I_f(\ell)$.

8°) \diamond Par hypothèse, $|f'(\ell)| < 1$, donc il existe k tel que $|f'(\ell)| < k < 1$.

D'après les théorèmes usuels, $|f'|$ est continue en ℓ , donc d'après le lemme du tunnel, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$, $|f'(x)| \leq k$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$\forall x, y \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, ce qui signifie que f est k -lipschitzienne sur $] \ell - \alpha; \ell + \alpha[$.

\diamond En particulier, $\forall x \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$, $|f(x) - \ell| = |f(x) - f(\ell)| \leq k|x - \ell|$.

Notamment, pour tout $x \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$, $|f(x) - \ell| \leq |x - \ell| < \alpha$, donc $f(x) \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$.

Ainsi l'intervalle $] \ell - \alpha; \ell + \alpha[$ est stable par f .

\diamond Soit $x \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$. Ce qui précède montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$f^{\circ n}(x) \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$ et que $|f^{\circ(n+1)}(x) - \ell| \leq k|f^{\circ n}(x) - \ell|$, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{\circ n}(x) - \ell| \leq k^n|x - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $k \in [0, 1[$. Alors, d'après le principe

des gendarmes, $f^{\circ n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, ce qui prouve que $x \in B_f(\ell)$.

Ceci démontre que $] \ell - \alpha; \ell + \alpha[\subset B_f(\ell)$.

9°) \diamond Soit $x_0 \in B_f(\ell)$.

Alors $f^{\circ n}(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^{\circ m}(x_0) \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$.

D'après les théorèmes usuels, $f^{\circ m}$ est continue en x_0 , donc d'après le lemme du tunnel, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, $f^{\circ m}(x) \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$.

Soit $x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$. Alors $f^{\circ m}(x) \in B_f(\ell)$, donc $f^{\circ n+m}(x) = f^{\circ n}(f^{\circ m}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

ce qui prouve que $x \in B_f(\ell)$. Ainsi, $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset B_f(\ell)$.

Donc $B_f(\ell)$ est voisinage de chacun de ses points : c'est un ouvert.

◇ Soit $x_0 \in I_f(\ell)$. A fortiori, x_0 appartient à $B_f(\ell)$, qui est ouvert, donc il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset B_f(\ell)$.

Dès lors, en tant qu'union d'intervalles possédant tous le point x_0 , $I_f(\ell) \cup]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$ est un intervalle de \mathbb{R} contenant ℓ et inclus dans $B_f(\ell)$.

Et comme $I_f(\ell)$ est le plus grand intervalle de \mathbb{R} contenant ℓ et inclus dans $B_f(\ell)$, il s'ensuit que $I_f(\ell) \cup]x_0 - \eta; x_0 + \eta[= I_f(\ell)$. On a donc $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset I_f(\ell)$.

Cela démontre que $I_f(\ell)$ est un ouvert.

Partie III : Version faible du théorème de Singer

10° La fonction $f^{\circ 2}$ est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} et $(f^{\circ 2})' = f' \times (f' \circ f)$.

La fonction f' est continue et ne s'annule pas sur $]a; b[$, donc f' garde un signe constant (strict) sur $]a; b[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Comme d'après la question 7, $f(]a; b]) \subset]a; b[$, la fonction $f' \circ f$ a le même signe (strict) que la fonction f' sur $]a; b[$.

Par suite, la fonction $(f^{\circ 2})' = f' \times (f' \circ f)$ est le produit de deux fonctions de même signe (strict) sur $]a; b[$, donc $(f^{\circ 2})' > 0$ sur $]a; b[$.

De plus, on a $(f^{\circ 2})'(\ell) = f'(\ell)f'(f(\ell)) = f'(\ell)f'(\ell) = f'(\ell)^2 < 1$, car ℓ est un point fixe attractif, donc $(f^{\circ 2})'(\ell) < 1$.

11° ◇ D'après la question 7, $f(I_f(\ell)) \subset I_f(\ell)$, donc $f(]a; b]) \subset]a; b[$, or f est continue en a , donc $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ est dans l'adhérence de $]a; b[$. Ainsi, $f(a) \in [a; b]$.

Par l'absurde, on suppose que $f(a) \in]a; b[$. Alors $f(a) \in I_f(\ell)$ et donc $f(a) \in B_f(\ell)$.

Alors, d'après la question 7, $a \in B_f(\ell)$. Dans ce cas, $]a; b[$ est un intervalle de \mathbb{R} contenant ℓ et inclus dans $B_f(\ell)$, ce qui contredit la maximalité de $I_f(\ell) =]a; b[$. C'est absurde, donc $f(a) \notin]a; b[$.

Il s'ensuit que $f(a) \in \{a; b\}$.

On démontre de même que $f(b) \in \{a; b\}$.

◇ On a vu que, pour tout $x \in]a; b[$, $(f^{\circ 2})'(x) > 0$, or $(f^{\circ 2})'$ est continue, donc en passant à la limite, on montre que $(f^{\circ 2})'(a) \geq 0$ et $(f^{\circ 2})'(b) \geq 0$. Ainsi $f^{\circ 2}$ est croissante sur $[a; b]$. En particulier, on en déduit que $f^{\circ 2}(a) \leq f^{\circ 2}(b)$.

Or $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $\{a; b\}$, donc $f^{\circ 2}(a)$ et $f^{\circ 2}(b)$ appartiennent aussi à $\{a; b\}$. Alors on a nécessairement $f^{\circ 2}(a) = a$ et $f^{\circ 2}(b) = b$.

12° En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f^{\circ 2}$ (qui est bien dérivable) entre les points a et ℓ , on obtient l'existence de $\alpha \in]a; \ell[$ tel que $\frac{f^{\circ 2}(\ell) - f^{\circ 2}(a)}{\ell - a} = (f^{\circ 2})'(\alpha)$. Comme a et ℓ sont des points fixes de f , le quotient dans le membre de gauche vaut 1, ce qui donne $(f^{\circ 2})'(\alpha) = 1$.

De même, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f^{\circ 2}$ entre les points ℓ et b , on obtient l'existence de $\beta \in]\ell; b[$ tel que $(f^{\circ 2})'(\beta) = 1$.

13°) La fonction $(f^{\circ 2})'$ est continue sur le compact $[\alpha; \beta]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, $(f^{\circ 2})'$ atteint son minimum sur $[\alpha; \beta]$.

On sait que $(f^{\circ 2})'(\alpha) = (f^{\circ 2})'(\beta) = 1$ et $(f^{\circ 2})'(\ell) < 1$ avec $\ell \in]\alpha; \beta[$. Par conséquent, le minimum de la fonction $(f^{\circ 2})'$ sur $[\alpha; \beta]$ est atteint en un point $x_m \in]\alpha; \beta[$ et l'on a, d'après la question 10, $0 < (f^{\circ 2})'(x_m) < 1$.

Comme f appartient à \mathcal{E} , d'après la question 3, $f^{\circ 2}$ appartient également à \mathcal{E} .

Or x_m est un minimum local de $(f^{\circ 2})'$ donc de $|(f^{\circ 2})'|$ (car $(f^{\circ 2})'$ est positive au voisinage de x_m), donc on peut appliquer la question 4 à la fonction $f^{\circ 2}$. On en déduit que $(f^{\circ 2})'(x_m) = 0$, ce qui est contradictoire.

Conclusion, si $I_f(\ell)$ est un intervalle borné, alors f' s'annule au moins une fois sur $I_f(\ell)$.

14°) \diamond Si ℓ_1 et ℓ_2 désignent deux points fixes attractifs distincts de f , alors $B_f(\ell_1)$ et $B_f(\ell_2)$ sont disjoints (sinon il existerait x tel que $f^{\circ n}(x)$ tende à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui n'est pas raisonnable !).

On en déduit notamment que l'application $\ell \mapsto B_f(\ell)$ est une bijection de l'ensemble des points attractifs de f vers l'ensemble des bassins d'attraction. Ainsi, pour dénombrer les points fixes attractifs de f , il suffit de compter les bassins d'attraction de f .

\diamond Si ℓ est un point fixe attractif tel que $I_f(\ell)$ est non majoré, alors $B_f(\ell)$ contient $[\ell; +\infty[$ (puisque $B_f(\ell)$ inclus $I_f(\ell)$ qui est un intervalle non majoré contenant ℓ). Dans ce cas, aucun autre bassin d'attraction ne peut être non majoré (sinon ce bassin ne serait pas disjoint de $B_f(\ell)$ au voisinage de $+\infty$). On retient donc qu'il y a au plus un bassin d'attraction non majoré.

De même, on démontre qu'il y a au plus un bassin d'attraction non minoré.

\diamond Reste le cas d'un point fixe attractif ℓ dont le bassin d'attraction $B_f(\ell)$ est borné. Dans ce cas, $I_f(\ell)$ est borné et le résultat de la question précédente s'applique : sur $I_f(\ell)$, la fonction f' s'annule au moins une fois. Comme l'hypothèse nous dit que f' s'annule en n points distincts, on en déduit qu'il y a au plus n bassins d'attraction bornés.

Cela fait donc au plus $n + 2$ bassins d'attraction, ce qui implique que f a au plus $n + 2$ points fixes attractifs.