Les polynômes : démonstration du lemme page 51

Lemme : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$.
Si $P \neq 0$ et si $F \notin \mathbb{K}$, alors $P \circ F \neq 0$.

Démonstration.
On suppose que $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P \neq 0$ et $F \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$.
$\diamond$ Supposons d'abord que $F \in \mathbb{K}[X]$. $F \notin \mathbb{K}$, donc $\deg(F) \geq 1$.

Notons $n = \deg(P)$ et posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors $P \circ F = \sum_{k=0}^{n} a_k F^k$, or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(F^k) = k\deg(F)$. En particulier, lorsque $k, h \in \mathbb{N}$ avec $k \neq h$, $\deg(F^k) \neq \deg(F^h)$, donc d'après le cours, $\deg(P \circ F) = \max_{0 \leq k \leq n} \deg(a_k F^k) = n\deg(F)$. En particulier, $\deg(P \circ F) \neq -\infty$, donc $P \circ F \neq 0$.

$\diamond$ Supposons maintenant que $F \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}[X]$.

Posons $F = \frac{A}{B}$, avec $A, B \in \mathbb{K}[X]$, B unitaire et A et B premiers entre eux.
$F \notin \mathbb{K}[X]$, donc $\deg(B) \geq 1$.
Notons $\widehat{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$. Alors B possède au moins une racine, notée α dans $\widehat{\mathbb{K}}$. On peut donc écrire B sous la forme : $B(X) = (X - \alpha)^m C(X)$, où $m \in \mathbb{N}^*$, $C \in \widehat{\mathbb{K}}[X]$ avec $\tilde{C}(\alpha) \neq 0$.

Posons à nouveau $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n = \deg(P)$.

Alors $P(F) = a_n \frac{A^n}{(X - \alpha)^{mn} C^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{A^k}{(X - \alpha)^{mk} C^k} = G + H$, en posant

$G = a_n \frac{A^n}{(X - \alpha)^{mn} C^n}$ et $H = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{A^k}{(X - \alpha)^{mk} C^k}$.

$G \neq 0$ et G admet α comme pôle de multiplicité $mn \in \mathbb{N}^*$.
H admet α comme pôle de multiplicité strictement inférieure à mn, éventuellement nulle (auquel cas α n'est pas un pôle de H).

Ainsi, on peut écrire G sous la forme $G = \frac{D}{(X - \alpha)^p E}$, avec $D, E \in \mathbb{K}[X]$, $p \geq 1$, $\tilde{D}(\alpha) \neq 0$ et $\tilde{E}(\alpha) \neq 0$.

On peut également écrire H sous la forme $H = \dfrac{D'}{(X-\alpha)^q E'}$, avec $D', E' \in \mathbb{K}[X]$, $D' \neq 0$, $0 \leq q < p$ et $\widetilde{E'}(\alpha) \neq 0$.
Alors $P(F) = G + H = \dfrac{1}{(X-\alpha)^q}\Big[\dfrac{DE' + (X-\alpha)^{p-q}D'E}{(X-\alpha)^{p-q}EE'}\Big]$,
or l'application polynomiale associée à $DE' + (X-\alpha)^{p-q}D'E$, évaluée en α, est égale à $\tilde{D}(\alpha)\widetilde{E'}(\alpha) \neq 0$, donc $DE' + (X-\alpha)^{p-q}D'E \neq 0$, puis $P(F) \neq 0$. $\square$