

Résumé de cours :  
Semaine 26, du 6 au 10 avril.

# Les polynômes (fin)

## 1 Polynômes scindés (suite)

**Notation.**  $\mathbb{K}$  désigne un corps quelconque.

**Définition.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ . On dit que  $P$  est simplement scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  si et seulement si  $P$  est scindé dans  $\mathbb{K}$  et si toutes ses racines sont simples.

**Relations de Viète entre coefficients et racines :** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme **scindé** dans  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ , avec  $n \geq 1$ . Alors  $P$  peut s'écrire sous les deux formes suivantes :

- $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ , avec  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  et  $a_n \neq 0$ ;
- $P(X) = a_n (X - \beta_1) \times \dots \times (X - \beta_n)$ , où  $\beta_1, \dots, \beta_n$  est la liste des racines de  $P$ , comptées avec multiplicité. Alors, pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}, \text{ où } \sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \beta_{i_1} \times \dots \times \beta_{i_p}.$$

Les  $\sigma_p$  s'appellent les fonctions symétriques élémentaires des racines. En particulier,

- Pour  $p = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n \beta_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ . Il s'agit de la somme des racines de  $P$ , comptées avec multiplicités.
- Pour  $p = n$ ,  $\prod_{i=1}^n \beta_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ . Il s'agit du produit des racines de  $P$ , comptées avec multiplicités.

**Cette fin de paragraphe est hors programme.**

**Définition.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  un polynôme à  $n$  indéterminées. On dit que  $A$  est symétrique si et seulement si, pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,  $A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = A(X_1, \dots, X_n)$ .

**Exemples.** Les polynômes de Newton :  $X_1^p + \dots + X_n^p$ , où  $n, p \in \mathbb{N}^*$  sont symétriques.

Les polynômes symétriques élémentaires : pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\Sigma_p(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} X_{i_1} \times \dots \times X_{i_p} \text{ est bien un polynôme symétrique.}$$

**Propriété.** (Admise) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $A$  est un polynôme symétrique de  $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_n]$  (où  $\mathbb{L}$  est un corps). Alors il existe  $B \in \mathbb{L}[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$  tel que  $A = B(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ .

**Corollaire.** Avec ces notations, si  $\mathbb{K}$  est un sur-corps de  $\mathbb{L}$  et si  $P \in \mathbb{L}[X]$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$ , alors en notant  $\beta_1, \dots, \beta_n$  les racines de  $P$  comptées avec multiplicité,  $A(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{L}$ .

**Exemple.** Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$  un polynôme dont les racines complexes comptées avec multiplicité sont notées  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Alors pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\beta_1^p + \dots + \beta_n^p \in \mathbb{Q}$ .

## 2 Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$

**Définition.** Si  $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ , on note  $\bar{P} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{a_k} X^k$ .

**Propriété.** L'application  $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & \bar{P} \end{array}$  est un isomorphisme d'anneaux.

**Propriété.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m$  si et seulement si  $\bar{\alpha}$  est racine de  $\bar{P}$  de multiplicité  $m$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Corollaire.** Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  et si  $\alpha$  est racine de  $P$  (resp : racine de multiplicité  $m$ ), alors  $\bar{\alpha}$  est aussi une racine de  $P$  (resp : racine de multiplicité  $m$ ).

**Théorème de d'Alembert :** Tout polynôme à coefficients complexes de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine complexe.

**Corollaire.** Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont exactement les polynômes de degré 1.

**Corollaire.** Dans  $\mathbb{C}[X]$ , deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucune racine complexe commune.

**Corollaire.** Dans  $\mathbb{C}[X]$ , tout polynôme non nul est scindé.

Dans  $\mathbb{C}[X]$ , le nombre de racines, comptées avec multiplicité, de tout polynôme non nul est égal à son degré.

**Propriété.** Soit  $P, Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ . Alors  $P \mid Q$  si et seulement si toute racine de  $P$  est racine de  $Q$  avec une multiplicité pour  $Q$  supérieure ou égale à celle pour  $P$ .

**Propriété.** Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

**Il faut savoir le démontrer.**

**Propriété.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ .  $P$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  si et seulement si toutes ses racines sont réelles.

# Les fractions rationnelles

## 3 Corps des fractions d'un anneau intègre

**Théorème.** Soit  $A$  un anneau intègre. Il existe un corps  $K$ , unique à un isomorphisme près, tel que  $A$  est un sous-anneau de  $K$ , et tel que tout élément de  $K$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  où  $(a, b) \in A^2$

avec  $b \neq 0$ .  $a$  est appelé le numérateur et  $b$  le dénominateur de l'écriture  $\frac{a}{b}$ .

$K$  est appelé le *corps des fractions* de  $A$ . C'est le plus petit corps contenant  $A$ .

## 4 Forme irréductible

**Notation.**  $\mathbb{K}$  désigne un corps quelconque.

**Définition.** On note  $\mathbb{K}(X)$  le corps des fractions de l'anneau intègre  $\mathbb{K}[X]$ . Les éléments de  $\mathbb{K}(X)$  sont appelés des fractions rationnelles en l'indéterminée  $X$ .

**Définition.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ .

$\frac{P}{Q}$  est un représentant irréductible de  $F$  si et seulement si  $F = \frac{P}{Q}$  et si  $P \wedge Q = 1$ .

$\frac{P}{Q}$  est un représentant unitaire de  $F$  si et seulement si  $F = \frac{P}{Q}$  et si  $S$  est unitaire.

**Propriété.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ .

$F$  possède un unique représentant irréductible et unitaire. Si on le note  $\frac{P}{Q}$ , alors

les représentants irréductibles de  $F$  sont les  $\frac{\lambda P}{\lambda Q}$  où  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,

et les représentants quelconques de  $F$  sont les  $\frac{LP}{LQ}$  où  $L \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

## 5 Degré

**Définition.**  $\deg\left(\frac{P}{Q}\right) \triangleq \deg(P) - \deg(Q) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

**Propriété.** Soit  $F, G \in \mathbb{K}(X)$ .

—  $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$ , avec égalité lorsque  $\deg(F) \neq \deg(G)$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

—  $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$ .

—  $\deg(FG^{-1}) = \deg(F) - \deg(G)$ .

## 6 Racines et pôles

**Définition.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  une fraction rationnelle admettant pour représentant **irréductible**  $\frac{A}{B}$ .

— Les racines de  $F$  sont les racines de  $A$ . Pour tout  $a \in \mathbb{K}$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a$  est une racine de  $F$  de multiplicité  $m$  si et seulement si  $a$  est racine de  $A$  de multiplicité  $m$ .

— Les pôles de  $F$  sont les racines de  $B$ . Pour tout  $a \in \mathbb{K}$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a$  est un pôle de  $F$  de multiplicité  $m$  si et seulement si  $a$  est racine de  $B$  de multiplicité  $m$ .

**Définition.** Si  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ , on note  $\bar{F} = \frac{\bar{P}}{\bar{Q}}$ .

**Propriété.** L'application  $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) \\ P & \longmapsto & \bar{P} \end{array}$  est un isomorphisme de corps.

**Propriété.** Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .  $\alpha$  est racine (resp : pôle) de  $F$  de multiplicité  $m$  si et seulement si  $\bar{\alpha}$  est racine (resp : pôle) de  $\bar{F}$  de multiplicité  $m$ .

**Corollaire.** Si  $F \in \mathbb{R}(X)$  et si  $\alpha$  est racine de  $F$  (resp : racine de multiplicité  $m$ ), alors  $\bar{\alpha}$  est aussi une racine de  $F$  (resp : racine de multiplicité  $m$ ).

## 7 Fonctions rationnelles

**Définition.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  une fraction rationnelle admettant pour représentant **irréductible**  $\frac{A}{B}$ . Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble de ses pôles.

La fonction rationnelle associée à  $F$  est l'application 
$$\tilde{F} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)}$$

**Propriété.** Si deux fractions rationnelles coïncident pour une infinité de valeurs de  $\mathbb{K}$ , elles sont égales.

**Il faut savoir le démontrer.**

## 8 Composition

**Définition.** Si  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$  et  $F \in \mathbb{K}(X)$ ,  $P \circ F = P(F) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n F^n$ .

**Propriété.** Pour tout  $F \in \mathbb{K}(X)$ , l'application  $P \mapsto P(F)$  est un morphisme d'anneaux de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathbb{K}(X)$ .

**Lemme :** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Si  $P \neq 0$  et si  $F \notin \mathbb{K}$ , alors  $P \circ F \neq 0$ .

**Définition.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  et  $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$ .  
Si  $F = \frac{P}{Q}$ , alors on pose  $F \circ G = F(G) = \frac{P(G)}{Q(G)}$ .

**Propriété.** Pour tout  $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$ ,  $F \mapsto F(G)$  est un endomorphisme du corps  $\mathbb{K}(X)$ .

## 9 Dérivation

**Définition.** Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . On pose  $F' \triangleq \frac{P'Q - Q'P}{Q^2} \in \mathbb{K}(X)$ .

**Définition.** Par récurrence, on peut définir la dérivée  $n$ -ième formelle d'une fraction rationnelle.

**Propriété.** Pour tout  $F \in \mathbb{K}(X)$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\widetilde{F^{(n)}} = \tilde{F}^{(n)}$ .

**Propriété.** Pour tout  $F \in \mathbb{K}(X)$ ,  $\deg(F') \leq \deg(F) - 1$ , avec égalité lorsque  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$  et  $\deg(F) \notin \{0, -\infty\}$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Propriété.** Soit  $F, G \in \mathbb{K}(X)$ ,  $a \in \mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

- $(F + G)' = F' + G'$ , et plus généralement,  $(F + G)^{(n)} = F^{(n)} + G^{(n)}$ .
- $(aF)' = aF'$ , et plus généralement,  $(aF)^{(n)} = aF^{(n)}$ .
- $(FG)' = F'G + FG'$ .
- Si  $G \neq 0$ ,  $\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - G'F}{G^2}$ .

**Propriété.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{K}(X)$ ,  $(F_1 \times \dots \times F_n)' = \sum_{i=1}^n F_i' \prod_{j \neq i} F_j$ .

**Formule de Leibniz :**  $(FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F^{(k)} G^{(n-k)}$ .

**Propriété.** Pour tout  $F, G \in \mathbb{K}(X)$ , avec  $G \notin \mathbb{K}$ ,  $(F \circ G)' = G' \times (F' \circ G)$ .

## 10 Décomposition en éléments simples.

### 10.1 Partie entière

**Définition.** Un élément simple de  $\mathbb{K}(X)$  est une fraction rationnelle de la forme  $\frac{P}{Q^m}$ , où  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , avec  $Q$  irréductible et  $\deg(P) < \deg(Q)$ .

**Propriété de la partie entière :** Soit  $F = \frac{A}{S} \in \mathbb{K}(X)$ . Il existe un unique couple  $(E, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $F = E + \frac{B}{S}$  avec  $\deg(B) < \deg(S)$ . De plus, si  $\frac{A}{S}$  est irréductible alors  $\frac{B}{S}$  l'est également.  $E$  est la *partie entière* de  $F$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

### 10.2 Divisions successives

Méthode des divisions successives pour décomposer en éléments simples une fraction de la forme  $\frac{B}{S^m}$  où  $S$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{K}[X]$  :

**A connaître.**

### 10.3 Le théorème

**Théorème de décomposition en éléments simples :**

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . On peut toujours écrire  $F$  sous la forme  $F = \frac{A}{S_1^{m_1} S_2^{m_2} \dots S_n^{m_n}}$ , où  $S_1, S_2, \dots, S_n$  sont des polynômes irréductibles dans  $\mathbb{K}[X]$ ,  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathbb{K}[X]$ . Alors il existe un unique  $E \in \mathbb{K}[X]$  et une unique famille  $(T_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m_i}}$  de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{T_{i,j}}{S_i^j} \right) \text{ avec pour tout } i \in [1; n] \text{ et } j \in [1; m_i], \deg(T_{i,j}) < \deg(S_i).$$

Cette égalité s'appelle la décomposition en éléments simples de  $F$  sur  $\mathbb{K}$ .

Le polynôme  $E$  est la *partie entière* de  $F$ .

Pour  $i \in [1; n]$ , la somme  $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{T_{i,j}}{S_i^j}$  s'appelle la partie polaire de  $F$  relative au polynôme  $S_i$ .

### 10.4 Dérivée logarithmique

**Propriété.** Soit  $P$  un polynôme scindé dans  $\mathbb{K}[X]$ . Alors, en notant  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les racines de  $P$  et  $m_1, \dots, m_n$  leurs multiplicités respectives,  $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{X - \alpha_i}$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

### 10.5 Dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$

**Théorème de décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  :**

Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ . On peut toujours écrire  $F$  sous la forme  $F = \frac{A}{(X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_n)^{m_n}}$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des poles de  $F$ ,  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$  sont leurs multiplicités

et  $A \in \mathbb{K}[X]$ . Alors il existe un unique  $E \in \mathbb{K}[X]$  et une unique famille  $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m_i}}$  de complexes tels

$$\text{que } F = E + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \right).$$

Pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , la somme  $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}$  est la partie polaire de  $F$  relative au pôle  $\alpha_i$ .

**Théorème de décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  :**

Soit  $F \in \mathbb{R}(X)$ . On peut toujours écrire  $F$  sous la forme

$$F = \frac{A}{\left( \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{m_i} \right) \times \left( \prod_{i=1}^p (X^2 + b_i X + c_i)^{k_i} \right)},$$

où  $a_1, \dots, a_n$  sont des poles réels de  $F$ ,  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$  sont leurs multiplicités, où pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $b_i, c_i \in \mathbb{R}$  avec  $b_i^2 - 4c_i < 0$  et où  $A \in \mathbb{K}[X]$ .

Alors il existe un unique  $E \in \mathbb{K}[X]$  et trois uniques familles  $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m_i}}$ ,  $(f_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k_i}}$  et  $(g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k_i}}$

$$\text{de réels tels que } F = E + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^{k_i} \frac{f_{i,j} X + g_{i,j}}{(X^2 + b_i X + c_i)^j} \right).$$

**Méthode :** En pratique, pour décomposer une fraction rationnelle  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  ou dans  $\mathbb{C}(X)$ ,

1. on commence par l'écrire sous forme irréductible unitaire,  $F = \frac{A}{B}$ .
2. En effectuant la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , on écrit  $F = E + \frac{C}{B}$ , où  $E$  est la partie entière de  $F$ . Lorsque  $\deg(F) < 0$ , il est évident que  $E = 0$ , donc on peut supprimer cette étape.
3. On scinde  $B$  en produit de polynômes irréductibles unitaires.
4. On écrit la DES de  $\frac{C}{B}$  à l'aide de coefficients indéterminés.
5. On calcule ces coefficients indéterminés.

## 10.6 Quelques techniques de DES

**Remarque.** La technique des divisions euclidiennes successives est adaptée à la DES de fractions de la forme  $\frac{P}{Q^m}$ , où  $Q$  est irréductible.

**Propriété.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  et soit  $\alpha \in \mathbb{K}$  un pôle de  $F$  de multiplicité  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors le coefficient  $\lambda$  de l'élément simple  $\frac{1}{(X - \alpha)^m}$  dans la DES de  $F$  vérifie  $\lambda = [(X - \alpha)^m F](\alpha)$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

**Propriété.** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  une fraction rationnelle admettant un pôle simple  $\alpha$ .

Si  $\frac{A}{S}$  est un représentant irréductible de  $F$ , alors le coefficient  $\lambda$  de l'élément simple  $\frac{1}{X - \alpha}$  dans la

$$\text{DES de } F \text{ vérifie } \lambda = \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{S}'(\alpha)}.$$

**Il faut savoir le démontrer.**

**Généralisation :** (hors programme) On suppose que  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$ .

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  dont  $a \in \mathbb{K}$  est l'un des pôles, de multiplicité  $m$ . Si  $\frac{A}{S}$  est un représentant irréductible de  $F$ , alors le coefficient  $\lambda$  de l'élément simple  $\frac{1}{(X - \alpha)^m}$  dans la DES de  $F$  vérifie  $\lambda = \frac{m! \tilde{A}(\alpha)}{\widetilde{S^{(m)}}(\alpha)}$ .

**Utilisation d'un développement limité :** Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$  et  $a$  un pôle de  $F$  de multiplicité  $m$ .

On peut écrire la DES de  $F$  sous la forme  $F(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{(X - a)^i} + G(X)$ . La fonction rationnelle

associée à  $G$  est continue en  $a$ , donc au voisinage de  $a$ ,  $(t - a)^m F(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (t - a)^{m-i} + O((t - a)^m)$ .

On peut donc calculer les  $\lambda_i$  en effectuant un développement limité de  $(t - a)^m F(t)$  au voisinage de  $a$  puis en invoquant l'unicité du développement limité.

**C'est une technique à connaître.**