

Feuille d'exercices 20.

Corrigé de quelques exercices.

Exercice 20.21 :

Supposons que $(X-1)^4|(P+1)$ et $(X+1)^4|(P-1)$: 1 et -1 sont racines de multiplicités au moins 4 de $P+1$ et $P-1$ respectivement, donc 1 et -1 sont racines de multiplicités au moins 3 des dérivées de $P+1$ et $P-1$, à savoir P' . Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P'(t) = C(t)(1-t)^3(1+t)^3 = (P-1)'$. Or $(P-1)(-1) = 0$,

$$\text{donc } P(x) - 1 = \int_{-1}^x C(t)(1-t^2)^3 dt.$$

La réciproque étant claire, P est tel que $(X-1)^4|(P+1)$ et $(X+1)^4|(P-1)$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = 1 + \int_{-1}^x C(t)(1-t^2)^3 dt$

$$\text{et } 0 = P(1) + 1 = 2 + \int_{-1}^1 C(t)(1-t^2)^3 dt.$$

On a $\deg(P) = \deg(C) + 7$, donc P est minimal lorsque C est minimal. La solution consiste donc à prendre C constant tel que $C \int_{-1}^1 (1-t^2)^3 dt = -2$.

$$\text{On calcule } \int_0^1 (1-t^2)^3 dt = \int_0^1 (1-3t^2+3t^4-t^6) dt = 1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{21-5}{35} = \frac{16}{35},$$

$$\text{donc } C = -\frac{35}{16} \text{ puis } P = 1 - \frac{35}{16} \int_{-1}^x (1-3t^2+3t^4-t^6) dt.$$

$$P = 1 - \frac{35}{16} \left[t - t^3 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 \right]_{-1}^x = 1 - \frac{35}{16} \left(x - x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right).$$

$$\text{Finalement, } P = \frac{35}{16} \left(\frac{x^7}{7} - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x \right).$$

Exercice 20.25 :

[Lorsque les racines des polynômes sont simples à déterminer, un bon critère pour décider si le polynôme P divise le polynôme Q , lorsqu'ils sont scindés, est de montrer que les racines de P sont des racines de Q avec une multiplicité supérieure.]

Dans le cas présent, il faut rechercher les éventuelles racines communes de $X^p - 1$ et de $X^q - 1$, pour déterminer les multiplicités des racines de $(X^p - 1)(X^q - 1)$.

◇ Soient $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ une racine $p^{\text{ème}}$ de l'unité et $e^{\frac{2ih\pi}{q}}$ une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité, avec $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et $h \in \{0, \dots, q-1\}$. Si elles sont égales, comme $\frac{2k\pi}{p}$ est $\frac{2h\pi}{q}$ sont

dans $[0, 2\pi[$, $\frac{2k\pi}{p} = \frac{2h\pi}{q}$, donc $\frac{k}{p} = \frac{h}{q}$, puis $qk = ph$. Alors $q \mid hp$, or $q \wedge p = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, $q \mid h$. Dans ce cas ces racines de l'unité sont égales à 1. Ainsi, à part 1, les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité sont distinctes des racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité.

◇ Le polynôme $(X^p - 1)(X^q - 1)$ admet donc 1 comme racine double, et comme racines simples les $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et les $e^{\frac{2ih\pi}{q}}$ pour $k \in \{1, \dots, q-1\}$.

On vérifie que $(X-1)(X^{pq}-1)$ admet 1 comme racine double et que les $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ et les $e^{\frac{2ih\pi}{q}}$ sont racines de ce polynôme. Ainsi, $(X-1)(X^{pq}-1)$ est divisible par $(X^p-1)(X^q-1)$.

Exercice 20.27 :

◇ *Unicité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(nt) = P(\text{cht}) = Q(\text{cht})$. Alors, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(P - Q)(x) = (P - Q)(\text{ch}(\arg\text{ch}x)) = 0$, donc $P - Q$ possède une infinité de racines. On en déduit que $P = Q$, ce qui prouve l'unicité.

◇ *Existence*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion : il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(nt) = P_n(\text{cht})$ et tel que $\deg(P_n) = n$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, $R(n)$ est vrai en convenant que $P_0 = 1$ et $P_1 = X$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $R(n)$ et $R(n-1)$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$\text{ch}(n+1)t + \text{ch}(n-1)t = \text{ch}(nt)\text{cht} + \text{sh}(nt)\text{sht} + \text{ch}(nt)\text{cht} - \text{sh}(nt)\text{sht} = 2\text{ch}(nt)\text{cht}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\text{ch}(n+1)t = 2P_n(\text{cht})\text{cht} - P_{n-1}(\text{cht})$. Ainsi, $\text{ch}(n+1)t = P_{n+1}(\text{cht})$, en convenant que $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

De plus, par hypothèse de récurrence, $\deg(XP_n) = n+1$ et $\deg(P_{n-1}) = n-1 \neq n+1$, donc d'après le cours, $\deg(P_{n+1}) = \max(n+1, n-1) = n+1$.

◇ De même, $\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos t \cos(nt)$, donc en adaptant la démonstration précédente, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\cos(nt) = P_n(\cos t)$. Cela signifie que les P_n sont les polynômes de Tchebychev de première espèce.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $P_n(\cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n})) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$, or pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $0 < \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n} + (n-1)\frac{\pi}{n} = \pi$, et l'application \cos est strictement décroissante donc injective sur l'intervalle $[0, \pi]$, donc la suite $(\cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}))_{0 \leq k \leq n-1}$ constitue une famille de n racines deux à deux distinctes de P_n . Or $\deg(P_n) = n$, donc on dispose ainsi de toutes les racines de P_n .

Exercice 20.29 :

1°) X et $1 - X$ sont premiers entre eux, donc, d'après des résultats d'arithmétique rappelés dans le cours, X^m et $(1 - X)^n$ sont également premiers entre eux. Le théorème de Bezout permet alors de conclure.

2°)

$$\begin{aligned}
1 &= (X+1-X)^{m+n-1} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} X^k (1-X)^{m+n-1-k} \\
&= X^m \sum_{k=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} X^{k-m} (1-X)^{m+n-1-k} \\
&\quad + (1-X)^n \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{k} X^k (1-X)^{m-1-k}, \text{ donc si l'on pose} \\
U &= \sum_{k=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} X^{k-m} (1-X)^{m+n-1-k} = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{h+m} X^h (1-X)^{n-1-h} \\
\text{et } V &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{k} X^k (1-X)^{m-1-k}, \text{ la relation (1) est vérifiée.}
\end{aligned}$$

De plus, U est une somme de polynômes de degré $n-1$, donc $\deg(U) < n$, et, de même, on vérifie que $\deg(V) < m$. Ainsi U et V conviennent.

3°) Dérivons l'égalité de l'énoncé : En posant $P = XU' + mU$ et $Q = -nV + (1-X)V'$, on obtient : $(1-X)^{n-1}Q + X^{m-1}P = 0$,
donc $X^{m-1} \mid (1-X)^{n-1}Q$, or $X^{m-1} \wedge (1-X)^{n-1} = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, $X^{m-1} \mid Q$, c'est-à-dire qu'il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = X^{m-1}R$. Cette relation implique que $\deg(Q) = \deg(R) + m - 1$, or $\deg(Q) \leq \max(\deg(V), \deg((1-X)V')) < m$, donc $\deg(R) \leq 0$. Ceci prouve que R est une constante que l'on notera $\alpha \in \mathbb{R}$:
ainsi $Q = \alpha X^{m-1}$.

On raisonne de même pour P .