

DS 8 : Les distributions.

Les calculatrices sont interdites.

Partie I : Étude de la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$.

On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1°) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, calculer $f'(t)$ et $f''(t)$.

2°) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $t^k f(t) \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} 0$.

3°) Donner l'allure du graphe de f .

Préciser quels sont les points d'inflexion, mais il est inutile de les tracer précisément sur le graphe de f .

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que,

pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{3n}} e^{-\frac{1}{t^2}}$. Déterminer le degré de P_n .

5°) Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

6°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$. Soit g une application dérivable sur $]a, b[$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ telle que $g(x) \xrightarrow[x \in]a, b[]{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \in]a, b[]{x \rightarrow b} \ell$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

7°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et simples.

Partie II : Fonctions C^∞ à support compact et distributions

Lorsque f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on dit que f est à support compact si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M], f(x) = 0$.

On note \mathcal{T} l'ensemble des applications de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} à support compact.

8°) Montrez que \mathcal{T} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Lorsque f est une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} à support compact,

on pose $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M f(t) dt$.

9°) Montrer que la définition précédente a bien un sens.

Lorsque f est une application de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} à support compact,

montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = 0$.

On note $\mathcal{D} = L(\mathcal{T}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications linéaires de \mathcal{T} dans \mathbb{R} . Les éléments de \mathcal{D} s'appellent des distributions.

On désigne par \mathcal{C} l'ensemble des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{T}$, on pose $[\varphi(f)](g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt$.

10°) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}$, $\varphi(f) \in \mathcal{D}$.

Montrer que φ est une application linéaire de \mathcal{C} dans \mathcal{D} .

11°) Construire une application de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est identiquement nulle sur \mathbb{R}_- et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* .

En déduire l'existence de $g \in \mathcal{T}$ telle que

- pour tout $t \in]0, 1[$, $g(t) > 0$;
- pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[$, $g(t) = 0$.

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{T}$ telle que

- pour tout $t \in]a, b[$, $g(t) > 0$;
- pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus]a, b[$, $g(t) = 0$.

12°) Montrer que φ est injective.

L'injectivité de φ permet d'identifier toute application f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} avec la distribution $\varphi(f) = \left(\begin{array}{l} \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt \end{array} \right)$. Ainsi, on écrira que, "au sens des distributions",

$$f = \left(\begin{array}{l} \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt \end{array} \right).$$

Par analogie, lorsque d est une distribution quelconque, pour tout $g \in \mathcal{T}$, on convient de noter le réel $d(g)$ sous la forme $d(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(t)g(t) dt$. Attention cependant, pour t fixé dans \mathbb{R} , la quantité $d(t)$ n'a aucune signification lorsque d est une distribution quelconque.

Avec cette notation, la distribution de Dirac δ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)g(t) dt = g(0).$$

13°) Montrer que δ est effectivement une distribution.

14°) Montrer qu'il existe $a \in \mathcal{T}$ tel que

- pour tout $t \in]-1, 1[$, $a(t) > 0$;
- pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$, $a(t) = 0$;
- et $\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) dt = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $a_n(t) = na(nt)$.

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t) dt$ et représenter l'allure du graphe de a_n .

Lorsque $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de distributions et que $d \in \mathcal{D}$, on dit que d_n tend vers d au sens des distributions, et on note alors $d_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} d$ si et seulement si, pour tout $g \in \mathcal{T}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_n(t)g(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} d(t)g(t) dt.$$

15°) Avec toutes ces notations, montrer que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \delta$.

Partie III : dérivation d'une distribution

16°) Lorsque f est une application de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , montrer que pour tout $g \in \mathcal{T}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)g(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(t) dt.$$

Lorsque d est une distribution quelconque, on définit la dérivée de d , que l'on note d' en convenant que, pour tout $g \in \mathcal{T}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d'(t)g(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} d(t)g'(t) dt.$$

17°) Montrer que l'application $d \mapsto d'$ est un endomorphisme sur \mathcal{D} .

Justifier le fait que la notion de dérivée d'une distribution prolonge la notion usuelle de dérivée d'une application de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On définit la fonction "signe", notée sgn , par :

lorsque $t < 0$, $\text{sgn}(t) = -1$ et lorsque $t \geq 0$, $\text{sgn}(t) = 1$.

18°) Montrer que, au sens des distributions, sgn est la dérivée de l'application "valeur absolue".

19°) Exprimer la dérivée de sgn en fonction de δ .

Donner une expression de δ' .

20°) On reprend l'application a de la question 14 (seule son existence importe ici).

Lorsque $g \in \mathcal{T}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \int_{-\infty}^x \left(g(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du \right) a(t) \right) dt$.

Montrer que la définition de h a bien un sens et montrer que $h \in \mathcal{T}$.

21°) En déduire que, lorsque d est une distribution telle que $d' = 0$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que, au sens des distributions, d est égale à la fonction constante de valeur c .

En itérant le procédé de dérivation d'une distribution, lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathcal{D}$, on dispose de la notion de dérivée n -ième de d , que l'on notera $d^{(n)}$.

22°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathcal{D}$. Montrer que $d^{(n)} = 0$ si et seulement si d est une application polynomiale de degré strictement inférieur à n .

23°) Résoudre l'équation différentielle $d'' = \delta$, où l'inconnue d est une distribution.

24°) Résoudre l'équation différentielle $d'' - 2d' + d = \delta$, où l'inconnue d est une distribution. On pourra pour cela définir puis utiliser la distribution $x \mapsto e^{-x}d(x)$.