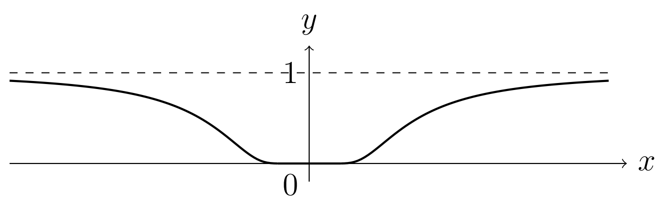
DS 8 : Un corrigé.

Partie I : Étude de la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$.

1°) D'après les théorèmes usuels, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{f'(t) = \frac{2}{t^3}\, e^{-\frac{1}{t^2}}}$ puis $f''(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}\Big(-\frac{6}{t^4} + \frac{4}{t^6}\Big)$, donc $\boxed{f''(t) = -\frac{6t^2-4}{t^6} e^{-\frac{1}{t^2}}}$.

2°) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, $|t^k f(t)| = |t|^k e^{-\frac{1}{t^2}} = e^{-\frac{1}{t^2}+k\ln|t|}$, or d'après les croissances comparées, $t^2 \ln|t| \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} 0$, donc au voisinage de 0, $-\frac{1}{t^2} + k\ln|t| \sim -\frac{1}{t^2} \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} -\infty$. On en déduit que $|t^k f(t)| \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} 0$, ce qui conclut.

3°) $\diamond$ L'application f étant paire, on peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
D'après la première question, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
En $+\infty$, on a clairement $f(t) \longrightarrow 1$, donc la droite horizontale d'équation $y = 1$ est asymptote, et la courbe est sous l'asymptote.
$\diamond$ En 0, d'après la question 2, f est continue. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $f'(t) \longrightarrow 0$, donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = 0$. Le graphe présente donc en l'origine une tangente horizontale.
$\diamond$ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. le point $(t, f(t))$ est un point d'inflexion du graphe si et seulement si f'' change de signe au voisinage de t, donc d'après le calcul de f'', si et seulement si
$6t^2-4 = 0$. Ainsi, le graphe de f, pour $t \geq 0$, présente un unique point d'inflexion en $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
$\boxed{\text{Le point d'inflexion a pour coordonnées } \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\Big)}$. Par parité, on a également un unique point d'inflexion pour t négatif, de coordonnées $\Big(-\sqrt{\frac{2}{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\Big)$.
$\diamond$ On peut maintenant représenter le graphe de f :



4°) Notons $\mathcal{R}(n)$ l'assertion : il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{3n}}\, e^{-\frac{1}{t^2}}$. De plus, lorsque $n \geq 1$, $\deg(P_n) = 2(n-1)$.
D'après la question 1, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$, avec $P_0 = 1$, $P_1 = 2$ et $P_2 = -6X^2+4$.
Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{P_n(t)}{t^{3n}}\, e^{-\frac{1}{t^2}}\right]$.
En dérivant le produit $\dfrac{P_n(t)}{t^{3n}} \times e^{-\frac{1}{t^2}}$, $f^{(n+1)}(t) = \left[\dfrac{P_n'(t)}{t^{3n}} - \dfrac{3n\,P_n(t)}{t^{3n+1}} + \dfrac{P_n(t)}{t^{3n}} \cdot \dfrac{2}{t^3}\right] e^{-\frac{1}{t^2}}$.
En mettant au même dénominateur, $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{t^3 P_n'(t) - 3n\, t^2\, P_n(t) + 2\, P_n(t)}{t^{3(n+1)}}\, e^{-\frac{1}{t^2}}$.
Ainsi, en posant $\boxed{P_{n+1} = X^3 P_n' - 3n\, X^2\, P_n + 2\, P_n \in \mathbb{R}[X]}$,
on a bien $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{P_{n+1}(t)}{t^{3(n+1)}}\, e^{-\frac{1}{t^2}}$.
Dans la relation encadrée, les polynômes $X^3 P_n'$, $X^2\, P_n$ et P_n sont respectivement de degrés $2(n-1)-1+3 = 2n$, $2n$ et $2(n-1)$, donc d'après le cours sur les polynômes, $\deg(P_{n+1}) \leq 2n$.
De plus, en notant a_n le coefficient dominant de P_n, le coefficient de degré $2n$ de P_{n+1} est égal à $a_n(2(n-1) - 3n) = -(n+2)a_n$. Cette quantité est non nulle, donc $\deg(P_{n+1}) = 2n$, ce qui prouve $\mathcal{R}(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5°) On a déjà vu que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = f'(0) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. P_n est continue, donc bornée au voisinage de 0, donc pour $t \in \mathbb{R}^*$,
$f^{(n)}(t) = O(1)\dfrac{1}{t^{3n}} e^{-\frac{1}{t^2}} \longrightarrow 0$, d'après la question 2. Alors, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en entier avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

6°) Supposons que g est injective. Alors g étant continue (car dérivable), d'après le cours, g est strictement monotone. Quitte à remplacer g par $-g$, on peut supposer que g est strictement croissante.
Soit $(a', b') \in]a, b[^2$ avec $a' < b'$, alors pour tout x, y tels que $a < x < a' < b' < y < b$, $g(x) \leq g(a') < g(b') \leq g(y)$. En faisant tendre indépendamment x vers a et y vers b, on obtient $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a'}} g(x) \leq g(a') < g(b') \leq \lim\limits_{\substack{y \to b \\ y > b'}} g(y) = \ell$, donc $\ell < \ell$, ce qui est faux. Donc g n'est pas injective. Ainsi, il existe $(a', b') \in]a, b[^2$ avec $a' < b'$ tel que $g(a') = g(b')$. D'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]a', b'[$ tel que $g'(c) = 0$.

7°) Pour $n = 0$, la propriété est évidente car P_0 ne possède aucune racine.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{R}(n)$ l'assertion : P_n possède au moins $2(n-1)$ racines réelles non nulles.
Initialisation. P_1 possède bien au moins 0 racine réelle non nulle.
Hérédité. Supposons $\mathcal{R}(n)$ pour $n \geq 1$. P_n admet donc au moins $2(n-1)$ racines réelles non nulles qui constituent autant de zéros de $f^{(n)}$. De plus $f^{(n)}(0) = 0$, donc $f^{(n)}$ possède au moins $2n-1$ zéros, notés $r_1, \ldots, r_{2n-1}$. Quitte à les réordonner, on peut supposer que $r_1 < \cdots < r_{2n-1}$.
Soit $i \in \mathbb{N}_{2n-2}$. $f^{(n)}(r_i) = 0 = f^{(n)}(r_{i+1})$, donc on peut appliquer le lemme de Rolle à $f^{(n)}$: il existe $s_i \in]r_i, r_{i+1}[$ tel que $0 = (f^{(n)})'(s_i) = f^{(n+1)}(s_i)$. Ainsi, $s_1 < s_2 < \cdots < s_{2n-2}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}_{2n-2}$, $s_i \neq 0$.
De plus, au voisinage de $+\infty$, en notant a_n le coefficient dominant de P_n,

$f^{(n)}(t) \sim \dfrac{a_n t^{2n-2}}{t^{3n}} e^{-\frac{1}{t^2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après la question précédente, il existe $s_{2n-1} > r_{2n-1}$ tel que $f^{(n+1)}(s_{2n-1}) = 0$. Par construction $r_{2n-1} \geq 0$, donc $s_{2n-1} \neq 0$.
De même, $f^{(n)}(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $s_0 < r_1$ tel que $f^{(n+1)}(s_0) = 0$ et on a aussi $s_0 < 0$.

Ainsi, $s_0, \ldots, s_{2n-1}$ constituent $2n$ zéros non nuls de $f^{(n+1)}$, donc également $2n$ racines réelles non nulles de P_{n+1}.
Ceci prouve $\mathcal{R}(n+1)$.
Pour conclure, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = 2n-2$, donc d'après le cours, P_n possède au plus $2n-2$ racines réelles ou complexes. Ainsi, P_n n'admet pas d'autres racines que les $2n-2$ précédentes, qui sont bien toutes réelles. Elles sont toutes simples, sinon le degré de P_n serait strictement supérieur à $2n-2$.

Partie II : Fonctions C^∞ à support compact et distributions.

8°) $\mathcal{T}$ est inclus dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'après le cours. Montrons que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
L'application nulle est de classe C^∞ et à support compact (prendre $M = 0$), donc $\mathcal{T} \neq \emptyset$.
Soit $f, g \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $M, M' \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$|x| > M \Longrightarrow f(x) = 0$ et $|x| > M' \Longrightarrow g(x) = 0$.
Posons $M'' = \max(M, M') \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > M''$,
$(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = 0$.
De plus, d'après les théorèmes usuels, $\lambda f + g$ est de classe C^∞, donc $\lambda f + g \in \mathcal{T}$.
D'après le cours, $\mathcal{T}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

9°) $\diamond$ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact. Il existe $M_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que f est nulle hors de $[-M_0, M_0]$. Alors, pour tout $M \geq M_0$, $\displaystyle\int_{-M}^{M} f(t)\, dt = \int_{-M_0}^{M_0} f(t)\, dt$,
donc la suite $M \longmapsto \displaystyle\int_{-M}^{M} f(t)\, dt$ est constante à partir du rang M_0. Ainsi la limite existe et
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-M_0}^{M_0} f(t)\, dt$.

$\diamond$ Supposons maintenant que f est de classe C^1. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus[-M_0, M_0]$, $f'(t) = 0$, donc f' est continue à support compact. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, dt$ est bien définie et
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, dt = \int_{-M_0-1}^{M_0+1} f'(t)\, dt = f(M_0+1) - f(-M_0-1) = 0 - 0 = 0$.

10°) $\diamond$ Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrons déjà que $\varphi(f)$ est correctement définie : soit $g \in \mathcal{T}$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| > M \Longrightarrow g(x) = 0$. Alors, $|x| > M \Longrightarrow (fg)(x) = 0$, donc fg est une application continue à support compact. Alors, d'après l'énoncé, la quantité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est bien définie. Ainsi $\varphi(f)$ est correctement définie, en tant qu'application de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$.
$\diamond$ Montrons que $\varphi(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{T}$. Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que, $|x| > M_1 \Longrightarrow g_1(x) = 0$ et $|x| > M_2 \Longrightarrow g_2(x) = 0$. Posons $M = \max(M_1, M_2)$. Alors d'après les questions 8 et 9,

$[\varphi(f)](\lambda g_1 + g_2) = \int_{-M}^{+M} f(t)(\lambda g_1(t) + g_2(t))\ dt = \lambda \int_{-M}^{+M} f(t)g_1(t)\ dt + \int_{-M}^{+M} f(t)g_2(t)\ dt$, d'après la linéarité de l'intégrale. Donc $[\varphi(f)](\lambda g_1 + g_2) = \lambda[\varphi(f)](g_1) + [\varphi(f)](g_2)$.
Ainsi $\varphi(f) \in L(\mathcal{T}, \mathbb{R}) = \mathcal{D}$.

$\diamond$ Montrons que φ est linéaire. Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $g \in \mathcal{T}$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| > M \Longrightarrow g(x) = 0$. Alors, $[\varphi(\lambda f_1 + f_2)](g) = \int_{-M}^{+M} (\lambda f_1(t) + f_2(t))g(t)\ dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)g(t)\ dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)g(t)\ dt$, donc $[\varphi(\lambda f_1 + f_2)](g) = \lambda[\varphi(f_1)](g) + [\varphi(f_2)](g) = [\lambda\varphi(f_1) + \varphi(f_2)](g)$.
Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathcal{T}$, on a $\varphi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda\varphi(f_1) + \varphi(f_2)$, donc φ est linéaire.

11°) $\diamond$ On définit l'application $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $B(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ et $B(x) = 0$ si $x \leq 0$. Ainsi, d'après la partie I, $B(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} 0$ et de manière évidente, $B(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x < 0}}{\longrightarrow} 0$, donc B est continue en 0. De plus, B est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et, toujours d'après la partie I à droite de 0 et de manière évidente à gauche de 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^{(n)}(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, d'après le théorème de la limite de la dérivée, B est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-$, et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\diamond$ Posons $g(t) = B(t)B(1-t)$. D'après les théorèmes usuels, g est de classe C^∞.
Pour $t \leq 0$: $B(t) = 0$ donc $g(t) = 0$.
Pour $t \geq 1$: $1 - t \leq 0$ donc $B(1-t) = 0$ et $g(t) = 0$.
Pour $t \in]0, 1[$: $B(t) > 0$ et $B(1-t) > 0$ donc $g(t) > 0$.
Ainsi $g \in \mathcal{T}$ avec les propriétés demandées.

$\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Posons $\tilde{g}(t) = g\Big(\dfrac{t-a}{b-a}\Big)$.
D'après les théorèmes de composition, $\tilde{g}$ est de classe C^∞.
Pour $t \leq a$, $\dfrac{t-a}{b-a} \leq 0$ donc $\tilde{g}(t) = 0$. Pour $t \geq b$, $\dfrac{t-a}{b-a} \geq 1$ donc $\tilde{g}(t) = 0$.
Pour $t \in]a, b[$, $\dfrac{t-a}{b-a} \in]0, 1[$ donc $\tilde{g}(t) > 0$.
Posons $M = \max(|a|, |b|)$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| > M$. Alors $t \notin [a, b]$, donc $\tilde{g}(t) = 0$. Ainsi $\tilde{g} \in \mathcal{T}$, est strictement positive sur $]a, b[$ et nulle sur $\mathbb{R} \backslash]a, b[$.

12°) Montrons que φ est injective en prouvant que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\ dt = 0$ pour tout $g \in \mathcal{T}$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, par exemple $f(x_0) > 0$.
Par continuité de f, d'après le lemme du tunnel, il existe $\varepsilon > 0$ tel que,
pour tout $t \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $f(t) > 0$.
D'après la question précédente, il existe $g \in \mathcal{T}$ telle que $g > 0$ sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ et $g = 0$ en dehors. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\ dt = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(t)g(t)\ dt > 0$, car l'intégrande est continue, positive, et strictement positive en x_0. C'est une contradiction.
De même si $f(x_0) < 0$. Donc $f = 0$, ce qui prouve que φ est injective.

13°) L'application $\delta : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ est définie par $\delta(g) = g(0)$. Vérifions que c'est une forme linéaire. Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$\delta(\lambda g_1 + g_2) = (\lambda g_1 + g_2)(0) = \lambda g_1(0) + g_2(0) = \lambda\delta(g_1) + \delta(g_2)$.

Ainsi $\delta \in L(\mathcal{T}, \mathbb{R}) = \mathcal{D}$: c'est bien une distribution.

14°) D'après la question 11, il existe $g_0 \in \mathcal{T}$ telle que $g_0 > 0$ sur $]-1,1[$ et $g_0 = 0$ hors de $]-1,1[$. En particulier, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t)\ dt = \int_{-1}^{1} g_0(t)\ dt > 0$, car à nouveau l'intégrande est continue, positive et non identiquement nulle.

On pose $a = \dfrac{g_0}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t)\ dt}$. Alors $a \in \mathcal{T}$ (car $\mathcal{T}$ est un espace vectoriel), $a > 0$ sur $]-1,1[$,

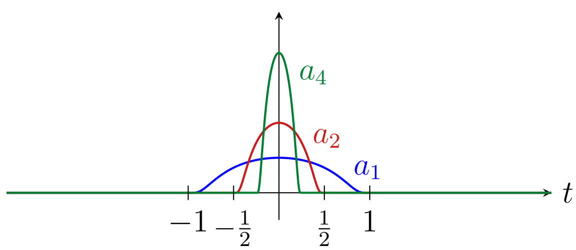
$a = 0$ hors de $]-1,1[$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\ dt = 1$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $nt \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, donc $a_n(t) = na(nt) = 0$. De plus a_n est C^∞ d'après les théorèmes usuels, donc $a_n \in \mathcal{T}$.

Par le changement de variable $u = nt$ (donc $dt = \frac{du}{n}$),

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t)\ dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} na(nt)\ dt = \int_{-1}^{1} a(u)\ du = 1$. Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t)\ dt = 1}$.

$\diamond$ **Allure du graphe de a_n.** Le support de a_n est $]-1/n, 1/n[$, et la hauteur maximale est de l'ordre de $n \cdot \max\limits_{t\in[-1,1]} a(t)$. Lorsque n croît, le graphe de a_n se resserre autour de 0 tout en s'élevant, de manière à conserver une intégrale totale égale à 1 :



15°) $\diamond$ Soit $g \in \mathcal{T}$. On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t)g(t)\ dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} na(nt)g(t)\ dt$.

Par le changement de variable $u = nt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t)g(t)\ dt = \int_{-1}^{1} a(u)g\Big(\frac{u}{n}\Big)\ du$. Donc

$\displaystyle a_n(g) - \delta(g) = \int_{-1}^{1} a(u)g\Big(\frac{u}{n}\Big)\ du - g(0) = \int_{-1}^{1} a(u)\Big(g\Big(\frac{u}{n}\Big) - g(0)\Big)\ du$, car $\displaystyle\int_{-1}^{1} a(u)\ du = 1$.

$\underline{\text{Soit } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$.

$\diamond$ g est continue en 0, donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$|t| < \alpha \Longrightarrow |g(t) - g(0)| \leq \varepsilon$.

$\underline{\text{Il existe } N \in \mathbb{N}^*}$ tel que $\frac{1}{N} < \alpha$, par exemple $N = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor + 1$.

$\underline{\text{Soit } n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq N}$.

Pour tout $u \in [-1,1]$, $|\frac{u}{n}| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \alpha$, donc $|g(\frac{u}{n}) - g(0)| \leq \varepsilon$. Ainsi, par inégalité triangulaire, $\underline{|a_n(g) - \delta(g)| \leq} \displaystyle\int_{-1}^{1} a(u)\Big|g\Big(\frac{u}{n}\Big) - g(0)\Big|\ du \leq \varepsilon \int_{-1}^{1} a(u)\ du = \underline{\varepsilon}$.

Ce qui est souligné démontre que, pour tout $g \in \mathcal{T}$, $a_n(g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta(g)$,

donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta$ au sens des distributions.

Partie III : dérivation d'une distribution.

16°) Soit f de classe C^1 et $g \in \mathcal{T}$. L'application fg est de classe C^1 et à support compact. D'après la question 9, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (fg)'(t)\ dt = 0$, or $(fg)' = f'g + fg'$, donc

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)g(t)\ dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(t)\ dt = 0$, d'où $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)g(t)\ dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(t)\ dt}$.

17°) $\diamond$ Soit $d \in \mathcal{D}$. La dérivée de d est définie par : pour tout $g \in \mathcal{T}$, $d'(g) = -d(g')$. Montrons que $d' \in \mathcal{D}$.
Soit $g \in \mathcal{T}$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, $g(x) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, $g'(x) = 0$. Ainsi $g' \in \mathcal{T}$, donc $d(g')$ a bien un sens.
Vérifions la linéarité de d' : soit $g_1, g_2 \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$d'(\lambda g_1 + g_2) = -d((\lambda g_1 + g_2)') = -d(\lambda g_1' + g_2') = -\lambda d(g_1') - d(g_2') = \lambda d'(g_1) + d'(g_2)$.
Donc $d' \in L(\mathcal{T}, \mathbb{R}) = \mathcal{D}$.

$\diamond$ L'application $d \longmapsto d'$ est linéaire : si $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $g \in \mathcal{T}$,
$(\lambda d_1 + d_2)'(g) = -(\lambda d_1 + d_2)(g') = -\lambda d_1(g') - d_2(g') = \lambda d_1'(g) + d_2'(g) = (\lambda d_1' + d_2')(g)$.
Donc $(\lambda d_1 + d_2)' = \lambda d_1' + d_2'$ et l'application $d \longmapsto d'$ est un endomorphisme de $\mathcal{D}$.

$\diamond$ D'après la question 16, si f est de classe C^1, pour tout $g \in \mathcal{T}$,
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)g(t)\ dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(t)\ dt$. Le membre de gauche est $\varphi(f')(g)$ et le membre de droite est $[\varphi(f)]'(g)$. Donc $\varphi(f') = [\varphi(f)]'$: la dérivée au sens des distributions de f coïncide avec $\varphi(f')$, c'est-à-dire avec la distribution associée à la dérivée usuelle f'. Ainsi, en identifiant toute application de classe C^1 avec sa distribution associée, la notion de dérivée d'une distribution prolonge la notion usuelle de dérivée d'une application de classe C^1 et ce prolongement s'étend à toutes les distributions.

18°) Soit $g \in \mathcal{T}$. Soit $A > 0$ tel que g soit nulle hors de $[-A, A]$.
$\diamond$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|g'(t)\ dt = \int_{-A}^{0} (-t)g'(t)\ dt + \int_0^A tg'(t)\ dt$.

Par intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^A tg'(t)\ dt = [tg(t)]_0^A - \int_0^A g(t)\ dt = -\int_0^A g(t)\ dt$ car $g(A) = 0$,

et $\displaystyle\int_{-A}^0 (-t)g'(t)\ dt = [-tg(t)]_{-A}^0 + \int_{-A}^0 g(t)\ dt = \int_{-A}^0 g(t)\ dt$ car $g(-A) = 0$. En sommant,
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|g'(t)\ dt = \int_{-A}^0 g(t)\ dt - \int_0^A g(t)\ dt = -\int_{-A}^A \mathrm{sgn}(t)g(t)\ dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(t)g(t)\ dt$, les deux dernières égalités étant en fait des définitions de l'intégrale entre $-A$ et A, puis entre $-\infty$ et $+\infty$ de l'application $t \longmapsto \mathrm{sgn}(t)g(t)$, laquelle n'est pas nécessairement continue.

Alors, pour tout $g \in \mathcal{T}$, $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(t)g(t)\ dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} |t|g'(t)\ dt}$. Ceci signifie que l'on peut identifier l'application sgn avec une distribution et que c'est exactement la dérivée au sens des distributions de l'application valeur absolue.

19°) $\diamond$ Soit $g \in \mathcal{T}$. Soit $A > 0$ tel que g soit nulle hors de $[-A, A]$.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(t)g'(t)\ dt = -\int_{-A}^0 g'(t)\ dt + \int_0^A g'(t)\ dt = -(g(0) - g(-A)) + (g(A) - g(0)) = -2g(0)$.

Donc $\text{sgn}'(g) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(t)g'(t)\ dt = 2g(0) = 2\delta(g)$. Ainsi $\boxed{\text{sgn}' = 2\delta}$

$\diamond$ Pour δ', par définition : $\delta'(g) = -\delta(g') = -g'(0)$. Ainsi $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)g(t)\ dt = -g'(0)}$

20°) $\diamond$ $g \in \mathcal{T}$ donc on peut poser $\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, du$, qui est un réel.
$a \in \mathcal{T}$ donc $g - \beta a \in \mathcal{T}$ d'après la question 8.
En particulier, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, $(g - \beta a)(x) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut convenir que
$\int_{-\infty}^{x} \Big(g(t) - \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du\Big)a(t)\Big)\ dt = \int_{-M}^{x} (g(t) - \beta a(t))\ dt$. Ainsi, la quantité $h(x)$ est correctement définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De plus, h est alors de classe C^∞, en tant que primitive d'une application de classe C^∞.
$\diamond$ Pour montrer que $h \in \mathcal{T}$, il suffit donc de vérifier que h est à support compact.
Il existe $M_0 > 0$ tel que g et a soient nulles hors de $[-M_0, M_0]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord que $x \leq -M_0$:
pour tout $t \in]-\infty, x]$, $g(t) = 0$ et $a(t) = 0$, donc $h(x) = 0$.
Supposons maintenant que $x \geq M_0$: on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\ dt = 1$, donc

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t) - \beta a(t))\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\ dt = \beta - \beta = 0.$$

Donc h est nulle hors de $[-M_0, M_0]$ et $h \in \mathcal{T}$.

21°) Soit $d \in \mathcal{D}$ telle que $d' = 0$, c'est-à-dire : pour tout $g \in \mathcal{T}$, $d(g') = 0$.
Soit $g \in \mathcal{T}$. Utilisons les notations de la question 20. $h' = g - \beta a$, donc par linéarité de d, $d(g) = d(h') + \beta d(a) = 0 + \beta d(a)$, car $d(h') = 0$ (puisque $h' \in \mathcal{T}$).
En posant $c = d(a) \in \mathbb{R}$ et en utilisant que $\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt$, on obtient : pour tout $g \in \mathcal{T}$,

$$d(g) = c\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot g(t)\ dt.$$

Cela signifie exactement que $d = \varphi(c)$, où c désigne la fonction constante de valeur c.
Ainsi, au sens des distributions, $\boxed{d' = 0 \Longrightarrow [d \text{ est une fonction constante}]}$.

22°) $\diamond$ **Sens direct.** Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $d^{(n)} = 0$, alors d est une application polynomiale de degré strictement inférieur à n.
Pour $n = 1$: c'est la question 21.
Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie au rang n et supposons que $d^{(n+1)} = 0$. Alors $(d')^{(n)} = 0$, donc par hypothèse de récurrence, il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que, au sens des distributions, $d' = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Posons $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.
Comme d'après la question 17, la dérivation au sens des distributions prolonge la notion usuelle de dérivée, la dérivée au sens des distributions de P est $P' = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = d'$. Ainsi $(d - P)' = d' - P' = 0$, donc d'après la question 21, $d - P$ est une constante c_0. Alors $d = P + c_0$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $n + 1$, ce qui conclut.

$\diamond$ **Réciproque.** Si d est un polynôme de degré $< n$, alors d'après le cours, la dérivée n-ième usuelle de ce polynôme est nulle. Toujours d'après la question 17, on en déduit que, au sens des distributions, $d^{(n)} = 0$.

23°) Notons $|.|$ l'application valeur absolue. D'après les questions 18 et 19, $|.|'' = \text{sgn}' = 2\delta$, donc $d_0 = \dfrac{|.|}{2}$ est une solution particulière de cette équation différentielle.
Alors, d'après la question précédente, pour tout $d \in \mathcal{D}$,
$d'' = \delta \iff (d - d_0)'' = 0 \iff [\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ d - d_0 = (x \longmapsto \alpha x + \beta)]$. En conclusion, l'ensemble des solutions est l'ensemble des applications de la forme $t \longmapsto \frac{|t|}{2} + \alpha t + \beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et où ces applications sont considérées comme des distributions.

24°) Notons (E) l'équation différentielle $d'' - 2d' + d = \delta$, en l'inconnue $d \in \mathcal{D}$.
$\diamond$ Lorsque α est une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et d est une distribution, on définit le produit αd par : pour tout $g \in \mathcal{T}$, $(\alpha d)(g) = d(\alpha g)$ (c'est bien défini car $\alpha g \in \mathcal{T}$).
Il s'agit d'une définition tout à fait naturelle avec la notation intégrale définie par l'énoncé après la question 12, car cela revient à écrire,
pour tout $g \in \mathcal{T}$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha d)(t) g(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d(t)(\alpha(t) g(t))\ dt$.
On vérifie facilement que, pour tout $g_1, g_2 \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$(\alpha d)(\lambda g_1 + g_2) = d(\lambda(\alpha g_1) + (\alpha g_2)) = \lambda(\alpha d)(g_1) + (\alpha d)(g_2)$. Ainsi, $\alpha d \in \mathcal{D}$. On a ainsi défini le produit d'une distribution par une application de classe C^∞.
En particulier, en prenant $\alpha = (x \longmapsto e^{-x})$, $\alpha d \in D$. On peut noter $\alpha d = (x \longmapsto e^{-x} d(x))$, avec les notations définies par l'énoncé après la question 12.

$\diamond$ On dispose de la formule de Leibniz : si $\alpha \in C^\infty$ et $d \in \mathcal{D}$, alors $(\alpha d)' = \alpha' d + \alpha d'$. En effet, pour tout $g \in \mathcal{T}$, $(\alpha d)'(g) = -(\alpha d)(g') = -d(\alpha g') = -d((\alpha g)' - \alpha' g)$,
donc $(\alpha d)'(g) = -d((\alpha g)') + d(\alpha' g) = d'(\alpha g) + d(\alpha' g) = (\alpha d')(g) + (\alpha' d)(g)$.
$\diamond$ Posons $\alpha = (t \longmapsto e^{-t})$ et $u = \alpha d$. Alors $u' = (\alpha d)' = -\alpha d + \alpha d' = \alpha(d' - d)$, puis
$u'' = (\alpha(d' - d))' = -\alpha(d' - d) + \alpha(d'' - d') = \alpha(d'' - 2d' + d)$.
Ainsi $(E) \iff u'' = \alpha\delta$. En effet, pour la réciproque, supposons que $u'' = \alpha\delta$, alors pour tout $g \in \mathcal{T}$, $[\alpha(d'' - 2d' + d)](g) = [\alpha\delta](g)$, c'est-à-dire $[d'' - 2d' + d](\alpha g) = \delta(\alpha g)$. Mais si $h \in \mathcal{T}$, alors en posant $\beta = (x \longmapsto e^x)$, $\beta h \in \mathcal{T}$, donc $[d'' - 2d' + d](\alpha\beta h) = \delta(\alpha\beta h)$. Or $\alpha\beta$ est la fonction constante égale à 1, donc pour tout $h \in \mathcal{T}$, $(d'' - 2d' + d)(h) = \delta(h)$, ce qui prouve bien que d est solution de (E).
$\diamond$ De plus, pour tout $g \in \mathcal{T}$, $(\alpha\delta)(g) = \delta(\alpha g) = (\alpha g)(0)$, par définition de la distribution δ de Dirac, mais $\alpha(0) = e^{-0} = 1$, donc $(\alpha\delta)(g) = g(0) = \delta(g)$.
Ainsi, $\alpha\delta = \delta$ et $(E) \iff u'' = \delta$. On est ramené à la question précédente.
$\diamond$ $u = \alpha d$, donc à nouveau en passant par $g \in \mathcal{T}$ quelconque, on montre que $d = \beta u$. Ainsi, $(E) \iff [\exists a, b \in \mathbb{R},\ d = \beta(d_0 + (x \longmapsto ax + b))]$.
De plus, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout $g \in \mathcal{T}$,
$[\beta(d_0 + (x \longmapsto ax + b))](g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \Big(\frac{|t|}{2} + at + b\Big) g(t)\ dt$, donc au sens des distributions,
$\beta(d_0 + (x \longmapsto ax + b)) = (t \longmapsto e^t(\frac{|t|}{2} + at + b))$.
En conclusion, l'ensemble des solutions de cette dernière équation différentielle est l'ensemble des applications de la forme $t \longmapsto e^t(\frac{|t|}{2} + at + b)$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et où ces applications sont considérées comme des distributions.

Mise en perspective historique.

La théorie des distributions a été formalisée par le mathématicien français **Laurent Schwartz** (1915–2002), qui reçut pour ce travail la **médaille Fields** en 1950 — il fut le premier Français à obtenir cette distinction. Schwartz raconte avoir découvert les principaux théorèmes de cette théorie en une seule nuit.

L'idée fondatrice est de renoncer à évaluer une « fonction généralisée » en un point, et de la définir plutôt par son action sur des fonctions-test $\varphi \in \mathcal{T}$. Ce point de vue, que Schwartz qualifiait de « synthèse et simplification de procédés hétérogènes et souvent incorrects », a donné un cadre rigoureux à la fonction δ de Dirac, utilisée par les physiciens depuis les années 1930 sans justification mathématique satisfaisante.

Les distributions construites dans ce devoir sont parfois qualifiées de **distributions « sauvages »** : les fonctions-test sont à support compact, ce qui impose très peu de contraintes à l'infini sur les distributions elles-mêmes. On peut ainsi dériver toute fonction localement intégrable, résoudre des équations différentielles au sens distributionnel (questions 23 et 24), mais on ne dispose pas de transformée de Fourier.

Pour remédier à cela, Schwartz introduit les **distributions tempérées** en élargissant l'espace des fonctions-test à toutes les fonctions C^∞ dont toutes les dérivées décroissent plus vite que tout polynôme à l'infini. On note $\mathcal{S}$ cet espace, appelé l'espace de Schwartz. On perd le support compact, mais on gagne une condition de décroissance qui permet de définir la transformée de Fourier. Les distributions tempérées sont alors exactement celles sur lesquelles la transformée de Fourier usuelle s'étend. Les distributions tempérées constituent donc le cadre naturel de l'analyse harmonique, tandis que les distributions générales restent indispensables pour l'étude locale des équations aux dérivées partielles.