

DM 49 : corrigé

1 Théorème de d'Alembert-Gauss

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire,

$$|S(z)| = |a_n z^n - \sum_{k=0}^{n-1} (-a_k z^k)| \geq |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|, \text{ or d'après l'inégalité triangulaire,}$$
$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|, \text{ donc } |S(z)| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = R(|z|).$$

2°) $\{|S(z)| / z \in \mathbb{C}\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} , minorée par 0, donc d'après la propriété de la borne inférieure, on peut définir $m = \inf\{|S(z)| / z \in \mathbb{C}\}$.

3°) On suppose que S est de degré n , donc $|a_n| \neq 0$ et $R(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} |a_n| t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Or $|S(t)| \geq R(|t|)$, donc d'après le principe des gendarmes, $|S(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, il existe $A > 0$ vérifiant : pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq A$, $|S(z)| \geq m + 1$.

4°) La boule fermée de centre 0 et de rayon A , notée B est fermée bornée dans \mathbb{C} , donc c'est un compact de \mathbb{C} . De plus, S est polynomiale, donc par composition, $z \mapsto |S(z)|$ continue. D'après le cours, la restriction sur B de $z \mapsto |S(z)|$ est bornée et elle atteint ses bornes. En particulier, il existe $\alpha \in B$ tel que, pour tout $\beta \in B$, $|S(\alpha)| \leq |S(\beta)|$.

Mais, si $\beta \in \mathbb{C} \setminus B$, alors $|\beta| \geq A$, donc $|S(\beta)| \geq m + 1$.

On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|S(z)| \geq \min(m+1, |S(\alpha)|)$, donc $\min(m+1, |S(\alpha)|)$ est un minorant de $\{|S(z)| / z \in \mathbb{C}\}$. Ainsi, par définition de la borne inférieure, $m \geq \min(m+1, |S(\alpha)|)$. Ceci implique que $|S(\alpha)| \leq m + 1$ puis que $m \geq |S(\alpha)|$. Mais $|S(\alpha)| \in \{|S(z)| / z \in \mathbb{C}\}$, donc $|S(\alpha)| = m$.

5°) Par définition, P est un polynôme de degré n tel que $P(0) = 1$, donc il s'écrit

$$P(X) = 1 + \sum_{k=1}^n b_k X^k \text{ avec } b_n \neq 0.$$

L'ensemble $\{k \in \{1, \dots, n\} / b_k \neq 0\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} , donc elle possède un minimum que l'on notera q . Alors $b_q \neq 0$ et $P(X) = 1 + \sum_{k=q}^n b_k X^k$.

6°) Soit $r \in]0, (\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q}}[$. On pose $z = r e^{i\frac{\pi-\theta}{q}}$. Par inégalité triangulaire,

$$|P(z)| \leq |1 + b_q z^q| + \sum_{k=q+1}^n |b_k| |z|^k. \text{ Or } b_q z^q = \rho e^{i\theta} r^q e^{i(\pi-\theta)} = -\rho r^q, \text{ donc}$$

$$|P(z)| \leq |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^n |b_k| r^k. \text{ De plus, } 0 < r < (\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q}}, \text{ donc } \rho r^q < 1, \text{ ce qui permet}$$

$$\text{d'écrire } |P(z)| \leq 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^n |b_k| r^k.$$

7°) Ainsi, pour tout $r \in]0, (\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q}}[$, $|P(z)| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^n |b_k| r^k \underset{r \rightarrow 0}{\sim} -\rho r^q < 0$,

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $r \in]0, \varepsilon[$, $|P(z)| - 1 < 0$, ce qui est faux car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = \frac{|S(z + \alpha)|}{m} \geq 1$. Ainsi, l'hypothèse sous laquelle on s'est placé est fautive : $S(\alpha) = 0$, donc le polynôme S possède au moins une racine complexe.

2 Disque de Gerschgorin

2.1 Un exemple

8°) Supposons que x est une racine réelle de P . Ainsi,

$$x^3 + (-2 + 3i)x^2 + (-3 - 5i)x + (6 - 2i) = 0, \text{ puis en séparant les parties réelle et imaginaire, } \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}.$$

La deuxième équation admet pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$, donc ses racines sont $\frac{5 \pm 7}{6}$, soit 2 et $-\frac{1}{3}$. On vérifie alors que $P(2) = 0$, donc 2 est une racine réelle de P .

9°) L'équation $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$ admet pour discriminant

$$\Delta = -9 - 4(-3 + i) = 3 - 4i. \text{ Il existe } a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } 3 - 4i = (a + ib)^2. \text{ Alors } a^2 - b^2 = 3 \text{ et } 2ab = -4. \text{ De plus } a^2 + b^2 = |3 - 4i| = 5, \text{ donc } a^2 = 4 \text{ et } b^2 = 1 \text{ avec } a \text{ et } b \text{ de signes contraires : on vérifie que } \Delta = (2 - i)^2. \text{ Les racines de l'équation sont donc } z_1 = \frac{-3i - (2 - i)}{2} = -1 - i \text{ et } z_2 = \frac{-3i + (2 - i)}{2} = 1 - 2i.$$

10°) D'après la question 8, $P(X) = (X - 2)(X^2 + \alpha X - (3 - i))$ avec $-2 + 3i = \alpha - 2$, donc $\alpha = 3i$. Ainsi, $P(X) = (X - 2)(X^2 + 3iX - 3 + i)$, donc d'après la question précédente, les racines de P sont 2, $-1 - i$ et $1 - 2i$, dont les modules sont égaux à 2, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$, lesquels sont bien tous inférieurs à

$$A = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\} = \max\{2\sqrt{10}, 1 + \sqrt{34}, 1 + \sqrt{13}\} = 1 + \sqrt{34}.$$

2.2 Cas général

11°) Pour tout $x > 0$, notons $f(x) = \frac{R(x)}{x^n} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^{k-n}$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $x \mapsto x^{k-n}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , car $k-n < 0$, or il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $a_k \neq 0$, donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $x^{k-n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, et il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $a_k \neq 0$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Enfin, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$, donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $] -\infty, 1[$. En particulier, il existe un unique $r > 0$ tel que $f(r) = 0$. Or pour tout $x > 0$, $f(x) = 0 \iff R(x) = 0$, donc R possède une unique racine dans \mathbb{R}_+^* .

12°) Par définition, $A \geq 1 + |a_1|$, donc $A > 0$.

$$A^n = \sum_{k=1}^{n-1} (A^{k+1} - A^k) + A = \sum_{k=1}^{n-1} A^k (A - 1) + A, \text{ or pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$A \geq 1 + |a_k|, \text{ donc } A^n \geq \sum_{k=1}^{n-1} A^k |a_k| + A \geq \sum_{k=1}^{n-1} A^k |a_k| + |a_0|. \text{ Ainsi, on a prouvé que}$$

$$R(A) = A^n - \sum_{k=0}^{n-1} A^k |a_k| \geq 0.$$

Si $r > A$, l'application f de la question précédente étant strictement croissante, $0 = f(r) > f(A) \geq 0$, ce qui est faux, donc $r \leq A$.

13°) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de S . D'après la question 1, $|S(z)| \geq R(|z|)$, donc $R(|z|) \leq 0$. Si $z = 0$, alors $0 = |z| \leq r$.

Si $z \neq 0$, alors $|z| > 0$ et $f(|z|) \leq 0$. Si $|z| > r$, alors $f(|z|) > f(r) = 0$ ce qui est faux, donc $|z| \leq r$.

Ainsi, toutes les racines de S sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r .

Or $r \leq A$, donc toutes les racines de S sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon A .

14°) \diamond Supposons que $a_{n-1} \neq 0$ et que S possède une racine complexe z de module r . $r > 0$, donc $z \neq 0$.

$$0 = S(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \text{ donc } \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| = |-z^n| = |z|^n.$$

$$\text{Par ailleurs, } \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = |z|^n - R(|z|) = |z|^n - R(r) = |z|^n,$$

$$\text{donc } \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|.$$

Soit $h \in \{0, \dots, n-2\}$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| &\leq |a_{n-1} z^{n-1} + a_h z^h| + \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{n-2} a_k z^k \right| \\ &\leq |a_{n-1} z^{n-1}| + |a_h z^h| + \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{n-2} a_k z^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|, \text{ donc} \\ |a_{n-1} z^{n-1} + a_h z^h| + \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{n-2} a_k z^k \right| &= |a_{n-1} z^{n-1}| + |a_h z^h| + \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{n-2} a_k z^k \right|, \end{aligned}$$

puis $|a_{n-1} z^{n-1} + a_h z^h| = |a_{n-1} z^{n-1}| + |a_h z^h|$: nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, et $a_{n-1} z^{n-1} \neq 0$, donc d'après le cours, il existe $\lambda_h \in \mathbb{R}_+$ tel que $a_h z^h = \lambda_h a_{n-1} z^{n-1}$, pour tout $h \in \{0, \dots, n-2\}$.

De plus, $\lambda_h = |\lambda_h| = \frac{|a_h|}{|a_{n-1}|} r^{h-n+1}$, donc λ_h ne dépend que de r et de S , et non de z .

Alors $z^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = \mu z^{n-1}$, en posant $\mu = -a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k - a_{n-1}$, or $z \neq 0$, donc

$z = \mu$ et μ ne dépend que de r et de S . Ceci prouve l'unicité de z , tel que $S(z) = 0$ avec $|z| = r$, si l'on suppose l'existence.

◇ Si $S(X) = X^n - 1$, alors $R(X) = X^n - 1$, donc $r = 1$, or S possède n racines distinctes de module 1, donc le résultat précédent peut être faux lorsque $a_{n-1} = 0$.

3 Le théorème d'Eneström-Keakeya (1893 et 1913)

$$15^\circ) \quad \diamond S = \frac{1}{\alpha_n} (X-1)P = \frac{1}{\alpha_n} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \right),$$

$$\text{donc } S = X^{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_n} X^k - \frac{\alpha_0}{\alpha_n}.$$

Ainsi, S est unitaire et $-\frac{\alpha_0}{\alpha_n} \neq 0$, donc on peut utiliser les résultats précédents.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_n} \leq 0$, donc le polynôme R associé à S vérifie

$R = S$. Or, par définition de S , $S(1) = 0$, donc $r = 1$. Ainsi, d'après notre solution de la question 13, toutes les racines de S , donc de P ont un module inférieur ou égal à 1.

◇ On suppose de plus que $\alpha_{n-1} < \alpha_n$. Alors le coefficient de S de degré n est non nul, donc on peut appliquer la question 14 : S possède au plus une racine de module 1. Or 1 est racine de S , donc c'est l'unique racine de module égal à 1. De plus $P(1) \geq \alpha_0 > 0$, donc 1 n'est pas racine de P . Ainsi pour toute racine complexe z de P , $|z| < 1$.

16°) Soit z une racine de Q .

◇ Posons $P(X) = Q(\gamma X) : P(X) = \sum_{k=0}^n b_k \gamma^k X^k$. Ainsi, si l'on note $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$,

on a $\alpha_0 > 0$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\alpha_{k+1} = b_{k+1} \gamma^{k+1} \geq b_{k+1} \gamma^k \times \frac{b_k}{b_{k+1}}$, par définition de γ , donc $\alpha_{k+1} \geq b_k \gamma^k = \alpha_k$. Ainsi P satisfait les conditions de la question précédente. Ses racines ont donc un module inférieur ou égal à 1.

Or $0 = Q(z) = P(\frac{z}{\gamma})$, donc $|z| \leq \gamma$.

◇ Posons maintenant $P(X) = X^n Q(\frac{\beta}{X}) : P(X) = \sum_{k=0}^n b_k \beta^k X^{n-k}$. Ainsi, si l'on note à

nouveau $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$, on a encore $\alpha_0 > 0$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$\alpha_{k+1} = b_{n-(k+1)} \beta^{n-k-1} \geq b_{n-k-1} \beta^{n-k} \times \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-1}}$, par définition de β ,

donc $\alpha_{k+1} \geq b_{n-k} \beta^{n-k} = \alpha_k$. Ainsi P satisfait les conditions de la question précédente. Ses racines ont donc un module inférieur ou égal à 1.

Or $Q(\frac{\beta}{X}) = \frac{1}{X^n} P(X)$, donc $Q(X) = Q(\frac{\beta}{X}) = \frac{X^n}{\beta^n} P(\frac{\beta}{X})$, donc $P(\frac{\beta}{z}) = 0$. Alors

$|\frac{\beta}{z}| \leq 1$, donc $|z| \geq \beta$.

4 Le théorème de Cohn (1922)

17°) Posons $P_1 = \frac{1}{\alpha_n} P$. P_1 est unitaire et l'un de ses coefficients non dominants est non nul, donc on peut appliquer à P_1 les résultats des questions 11 à 13 : en posant

$R_1(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} X^k$, R_1 possède une unique racine $\rho(P) \in \mathbb{R}_+^*$. C'est donc

l'unique solution dans \mathbb{R}_+^* de l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| x^k = |\alpha_n| x^n$.

De plus, toute racine ζ de P est racine de P_1 , donc $|\zeta| \leq \rho(P)$.

18°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion : pour tout polynôme P de degré n , il existe $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $P = \alpha_n \prod_{i=1}^n (X - \zeta_i)$, où α_n est le coefficient dominant de P .

Pour $n = 1$, $P(X) = \alpha_1 X + \alpha_0 = \alpha_1 (X - (-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}))$, d'où $R(1)$.

Pour $n \geq 2$, soit P un polynôme de degré n et de coefficient dominant α_n . D'après le théorème de D'Alembert, il existe $\zeta_n \in \mathbb{C}$ tel que $P(\zeta_n) = 0$. D'après le cours, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \alpha_n (X - \zeta_n) Q$. Q est unitaire de degré $n-1$, donc d'après $R(n-1)$,

il existe $(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $Q = \prod_{i=1}^{n-1} (X - \zeta_i)$. Ainsi, $P = \alpha_n \prod_{i=1}^n (X - \zeta_i)$ ce

qui prouve $R(n)$.

Le principe de récurrence permet de conclure, quitte ensuite à réordonner les racines de P en fonction de leurs modules.

19°) Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. D'après les relations de Viète,

$$\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_n} \right| = \left| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_{n-k}} \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} |\zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_{n-k}}|, \text{ par inégalité}$$

triangulaire. Or pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $|\zeta_k| \leq |\zeta_n|$, donc

$$\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_n} \right| \leq |\zeta_n|^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n} 1.$$

De plus, pour construire un $(n-k)$ -uplet $(i_1, i_2, \dots, i_{n-k})$ d'entiers tel que

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n$, il suffit de choisir la partie $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$ de $n-k$

éléments parmi les n éléments $1, \dots, n$, donc $\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_n} \right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$.

De plus, lorsque $k = n$, l'inégalité est encore car dans ce cas, $\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_n} \right| = 1 = \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$.

$$\mathbf{20^\circ)} \quad \rho(P)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} \rho(P)^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k} \rho(P)^k.$$

21°) Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, $\rho(P)^n \leq (\rho(P) + |\zeta_n|)^n - \rho(P)^n$, donc $2\rho(P)^n \leq (\rho(P) + |\zeta_n|)^n$, puis $2^{\frac{1}{n}} \rho(P) \leq \rho(P) + |\zeta_n|$, ce qui permet de conclure.

22°) 0 n'est pas racine de P , donc $\alpha_0 \neq 0$ et on a toujours $\alpha_n \neq 0$,

donc $Q = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^{n-k}$ satisfait les hypothèses portant sur P . Ainsi, d'après la question

précédente, $(2^{\frac{1}{n}} - 1)\rho(Q) \leq \zeta \leq \rho(Q)$, où ζ désigne une racine de Q de module maximal.

Or $Q(X) = X^n P(\frac{1}{X}) = X^n \prod_{i=1}^n (\frac{1}{X} - \zeta_i) = \prod_{i=1}^n (1 - X\zeta_i) = \beta \prod_{i=1}^n (X - \frac{1}{\zeta_i})$, où β est le

coefficient dominant de Q . Ainsi, on peut choisir $\zeta = \frac{1}{\zeta_1}$, donc $(2^{\frac{1}{n}} - 1)\rho(Q) \leq \frac{1}{\zeta_1} \leq \rho(Q)$ et on conclut en passant aux inverses, toutes ces quantités étant strictement positives.

23°) Lorsque $P(X) = X^3 + (-2 + 3i)X^2 + (-3 - 5i)X + (6 - 2i)$, $\rho(P)$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $x^3 - \sqrt{13}x^2 - \sqrt{34}x - 2\sqrt{10} = 0$. Par dichotomie, on obtient $\rho(P) = 5,019 \pm 10^{-3}$. De plus le plus grand module des trois racines de P est égal à $\sqrt{5} = 2,236 \pm 10^{-3}$: cela illustre le résultat de la question 17.

On a aussi $(2^{\frac{1}{3}} - 1)\rho(P) = 1,304 \pm 10^{-3}$: cela illustre la question 21.

5 Un dernier résultat

24°) Posons $R_1(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} X^k$. Il existe $i \in \{0, \dots, n-2\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$, donc on peut appliquer les résultats des questions 11 à 13 à $\frac{1}{\alpha_n} P_1$ et à R_1 . Or $R_1(\rho(P)) = \left(\rho(P)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} \rho(P)^k \right) + \frac{|\alpha_{n-1}|}{|\alpha_n|} \rho(P)^{n-1} = \frac{|\alpha_{n-1}|}{|\alpha_n|} \rho(P)^{n-1} \geq 0$, donc d'après la question 12, $\rho(P_1) \leq \rho(P)$.

25°) Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine de P telle que $|\zeta| > \rho(P_1)$. En particulier, $|\zeta| > 0$. ζ étant racine de P , $\alpha_n \zeta^n + \alpha_{n-1} \zeta^{n-1} = - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k \zeta^k$, donc $|\alpha_n \zeta^n + \alpha_{n-1} \zeta^{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| |\zeta|^k$, puis $|\alpha_n \zeta + \alpha_{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \frac{1}{|\zeta|^{n-1-k}}$, or $|\zeta| > \rho(P_1)$, donc $|\alpha_{n-1} + \alpha_n \zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \frac{1}{\rho(P_1)^{n-1-k}} \leq \frac{1}{\rho(P_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \rho(P_1)^k$.

26°) Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine de P . Si z n'est pas dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\rho(P_1)$, $|z| > \rho(P_1)$, donc d'après la question précédente, $|\alpha_{n-1} + \alpha_n \zeta| \leq \frac{1}{\rho(P_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \rho(P_1)^k = |\alpha_n| \rho(P_1)$ par définition de $\rho(P_1)$, donc $|\zeta - (-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n})| \leq \rho(P_1)$, si bien que ζ est dans le disque de centre $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ et de rayon $\rho(P_1)$.

27°) Lorsque $P(X) = X^3 + (-2 + 3i)X^2 + (-3 - 5i)X + (6 - 2i)$, $\rho(P_1)$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $x^3 - \sqrt{34}x - 2\sqrt{10} = 0$. Par dichotomie, on obtient $\rho(P_1) = 2,839 \pm 10^{-3}$. De plus, pour cet exemple, $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = -2 + 3i$. D'après la question 10, toutes les racines de P sont dans le disque de centre 0 et de rayon $\rho(P_1)$.