Résumé de cours :
Semaine 27, du 13 avril au 17.

Les fractions rationnelles (fin)

1 Application des fractions rationnelles au calcul intégral

1.1 Primitives d'une fraction rationnelle

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, pour calculer $\displaystyle\int F(t)dt$, on décompose F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
On est ainsi ramené au problème du calcul des primitives des éléments simples de $\mathbb{R}(X)$:
Lorsque $F(X) = \dfrac{aX+b}{(X^2+cX+d)^\alpha}$, avec $\Delta = c^2 - 4d < 0$, À connaître :
on décompose le calcul de $\displaystyle\int F(t)dt$ en celui de $\displaystyle\int \frac{u'(t)}{u(t)^\alpha}\,dt$, où $u(t) = t^2 + ct + d$, et celui de $\displaystyle\int \frac{dt}{u(t)^\alpha}$.
Pour ce dernier, on écrit $X^2 + cX + d = (X + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{c^2}{4} = (X-p)^2 + q^2$
et on se ramène au calcul de $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$, que l'on réalise en posant $t = \tan u$.

1.2 Fonctions rationnelles de sin et cos : hors programme

Pour calculer $\int R(\sin t, \cos t)\ dt$, où $R \in \mathbb{R}(X,Y)$:

Cas particulier. $\int \sin^p t \cos^q t\ dt$, avec p et q pairs. C'est le seul cas où on linéarise.

Cas général. On pose $u = \tan \dfrac{t}{2}$ pour se ramener à une primitive de fraction rationnelle.

Les règles de Bioche. Notons $f : t \longmapsto R(\sin t, \cos t)$.
Si $f(-t)d(-t) = f(t)dt$, on posera $x = \cos t$ (On a $\cos(-t) = \cos t$) ,
Si $f(\pi - t)d(\pi - t) = f(t)dt$, on posera $x = \sin t$ (On a $\sin(\pi - t) = \sin t$) ,
Si $f(\pi + t)d(\pi + t) = f(t)dt$, on posera $x = \tan t$ (On a $\tan(\pi + t) = \tan t$).
Si deux des trois relations précédentes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi. On pose alors $x = \sin^2 t$ ou $x = \cos(2t)$.

1.3 Fonctions rationnelles en sh et ch : hors programme

Pour calculer $\int R(\mathrm{sh}t, \mathrm{ch}t)\ dt$, où $R \in \mathbb{R}(X,Y)$, on regarde quel procédé serait utilisé pour le calcul de $\int R(\sin t, \cos t)\ dt$ et on le transpose en trigonométrie hyperbolique.
Dans le cas général, on peut poser $x = e^t$.

Les matrices

2 Vocabulaire

Définition. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On appelle ***matrice*** à n lignes et à p colonnes (à coefficients dans $\mathbb{K}$) toute famille de scalaires indexée par $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$.
Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p} = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, on représente M sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix},$$

où le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Notation. L'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,n)$ est souvent noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définitions :
- Une ***matrice ligne*** est une matrice ne possédant qu'une ligne.
- Une ***matrice colonne*** est une matrice ne possédant qu'une colonne.
- Une ***matrice carrée*** est une matrice possédant autant de lignes que de colonnes.
- $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est une ***matrice triangulaire supérieure*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \ \big(i > j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$.
- M est une ***matrice triangulaire inférieure*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \ \big(i < j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$.
- $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est une ***matrice diagonale*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \quad \big(i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$. On note alors $M = diag(m_{1,1}, \ldots, m_{n,n})$.
- Une matrice carrée et diagonale est dite ***scalaire*** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont égaux. En particulier, lorsque tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1, on obtient la matrice identité, notée I_n.

Remarque. On identifiera $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,1)$ (ensemble des matrices colonnes).

3 Opérations sur les matrices

Définition. On sait dèjà que $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On dispose ainsi des lois d'addition et de multiplication par un scalaire.

Propriété. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille de matrices $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ définie par : Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, $E_{i,j} = (\delta_{a,i}\delta_{b,j})_{\substack{1\le a\le n\\1\le b\le p}}$.
$E_{i,j}$ est appelée la (i,j)-ième matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Tous ses coefficients sont nuls, sauf celui de position (i,j) qui est égal à 1.
Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} M_{i,j}E_{i,j}$.
On en déduit que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Convention : Lorsque A est une matrice, on notera $A_{i,j}$ son coefficient de position (i,j).

Définition du produit matriciel : Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{p})$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p},q)$. On appelle ***produit des matrices*** A et B la matrice $C \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,q)$ définie par

$$\boxed{[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}}.$$

Formule pour le produit de trois matrices : Soit $(n,m,l,p) \in (\mathbb{N}^*)^4$.
Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{m})$, $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{m},\mathbf{l})$ et $C \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{l},p)$: $[(AB)C]_{i,h} = [A(BC)]_{i,h} = \sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k\le l}} A_{i,j}B_{j,k}C_{k,h}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La multiplication matricielle est associative.

Propriété. La mutiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Propriété. Pour tout $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, $I_nM = MI_p = M$.

Propriété. Soit $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$. Pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $MX \in \mathbb{K}^n$.
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $[MX]_i = \sum_{j=1}^{p} M_{i,j}x_j$
et $MX = x_1M_1 + \cdots x_pM_p$, en notant $M_1,\dots,M_p$ les colonnes de M.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, la j-ème colonne de M est Mc_j, où $c_j = (\delta_{i,j})_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^p$.

Définition. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, $\begin{array}{rccc} \tilde{M}: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & MX \end{array}$ est une application linéaire que l'on appelle **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice** M.

Propriété. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & L(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On identifie souvent M et $\tilde{M}$, auquel cas, pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $MX = M(X)$.
Cela permet d'interpréter une matrice M comme une application linéaire.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$: $\mathrm{Ker}(M) \triangleq \{X \in \mathbb{K}^p \ / \ MX = 0\}$

et $\mathrm{Im}(M) \triangleq \{MX \ / \ X \in \mathbb{K}^p\} = \mathrm{Vect}\{\text{colonnes de } M\}$.

Corollaire. Soit $(M,M') \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$: $\big(\forall X \in \mathbb{K}^p \quad MX = M'X\big) \Longleftrightarrow M = M'$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,q)$. Alors $\widetilde{AB} = \tilde{A} \circ \tilde{B}$.

4 L'algèbre des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, ni commutative ni intègre dès que $n \ge 2$.

Définition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Propriété. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n) & \longrightarrow & L(\mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- A est inversible dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$.
- $\tilde{A}$ est inversible dans $L(\mathbb{K}^n)$ (auquel cas, $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$).
- Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $Y \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = Y$.
- A est inversible à droite.
- A est inversible à gauche.
- $\text{Ker}(A) = \{0\}$, i.e pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$.
- $\tilde{A}$ est surjective, i.e $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(M) \triangleq ad - cb \neq 0$, et dans ce cas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule de Cramer : Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}^4$. Lorsque $\det = ad - cb \triangleq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det} \ \wedge\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Notation. $GL_n(\mathbb{K})$ = groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On l'appelle le groupe linéaire de degré n.

Exemple. Un automorphisme intérieur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un automorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M \longmapsto AMA^{-1}$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ forment une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on pose $c_i = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $F_i = \text{Vect}(c_k)_{1 \leq k \leq i}$.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est triangulaire supérieure ssi, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, F_j est stable par $\tilde{M}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $n \geq 2$.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement : inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre non commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Le produit d'une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(a_1, \ldots, a_n)$ par une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(b_1, \ldots, b_n)$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$.
- Une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $a_i \neq 0$ et dans ce cas, son inverse est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n})$

Il faut savoir le démontrer.

5 Transposée d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$. On appelle ***transposée de la matrice*** A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n)$ définie par $[{}^tA]_{i,j} = A_{j,i}$.

Propriété. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, ${}^t({}^tA) = A$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Propriété. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) \times \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Alors, ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Définition. M est une ***matrice symétrique*** si et seulement si ${}^tM = M$.
M est une ***matrice antisymétrique*** si et seulement si ${}^tM = -M$.

Remarque. Lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, sa diagonale est nulle.

Notation. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Propriété. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mais ce ne sont pas des sous-algèbres. Cependant, elles sont stables par passage à l'inverse. De plus, lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Il faut savoir le démontrer.

6 Différentes interprétations du produit matriciel

Au niveau des colonnes de la matrice de droite : Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, \mathbf{p})$. Si $B_1, \ldots, B_q$ sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^p$, $A \times \boxed{B_1}\boxed{B_2}\cdots\boxed{B_q} = \boxed{AB_1}\boxed{AB_2}\cdots\boxed{AB_q}$.

Au niveau des colonnes de la matrice de gauche :

— Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $X \in \mathbb{K}^p$, MX est une combinaison linéaire des colonnes de M.
Plus précisément, si l'on note $M_1, \ldots, M_p$ les colonnes de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$,
$MX = x_1M_1 + \cdots + x_pM_p$.

— Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A : en notant $A_1, \ldots, A_p$ les colonnes de A et $B = (b_{i,j})$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est égale à $b_{1,j}A_1 + \cdots + b_{p,j}A_p$.

Au niveau des lignes de la matrice de gauche : Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, \mathbf{p})$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p}, q)$. Notons ${}_1A, \ldots, {}_nA$ les lignes de A. Alors $AB = \begin{pmatrix} \boxed{{}_1A} \\ \vdots \\ \boxed{{}_nA} \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} \boxed{{}_1AB} \\ \vdots \\ \boxed{{}_nAB} \end{pmatrix}$.

Au niveau des lignes de la matrice de droite :

— Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $X \in \mathcal{M}_{1,n}$, XM est une combinaison linéaire des lignes de M.
Plus précisément, si l'on note ${}_1M, \ldots, {}_nM$ les lignes de M et $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$,
$XM = x_1 \times {}_1M + \cdots + x_n \times {}_nM$.

— Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B : en notant ${}_1B, \ldots, {}_pB$ les lignes de B et $A = (a_{i,j})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est égale à $a_{i,1} \times {}_1B + \cdots + a_{i,p} \times {}_pB$.

7 Trace d'une matrice

Définition. La ***trace de la matrice*** $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

Propriété. La trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors, $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Il faut savoir le démontrer.

ATTENTION : Si $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$, en général $Tr(ABC) \neq Tr(ACB)$.

Définition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.
La relation de similitude (“être semblable à”) est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp : trigonalisable) si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (resp : triangulaire supérieure).

Propriété. Deux matrices semblables ont la même trace, mais la réciproque est fausse.
Il faut savoir le démontrer.

8 Matrices décomposées en blocs

8.1 Matrices extraites

Définition. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et soit I et J deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $|I| = n$ et $|J| = p$. Notons $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$ les éléments de I et $0 \leq j_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq j_p$ les éléments de J.
Alors on convient d'identifier toute famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de **scalaires** indexée par $I \times J$ avec la matrice $(M_{i_h,j_k})_{\substack{1\leq h\leq n \\ 1\leq k\leq p}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$.

Remarque. Lorsque I ou J est vide, $I \times J = \emptyset$ et $\mathbb{K}^{I\times J}$ possède un unique élément, que l'on appellera la matrice vide.

Définition. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$. Une matrice extraite de M est une matrice de la forme $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, où $I \subset \mathbb{N}_n$ et $J \subset \mathbb{N}_p$.

8.2 Définitions

Définition. Soient $(n_1, \ldots, n_a) \in (\mathbb{N}^*)^a$ et $(p_1, \ldots, p_b) \in (\mathbb{N}^*)^b$. On pose $n = \sum_{i=1}^{a} n_i$ et $p = \sum_{j=1}^{b} p_j$.
Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$, considérons une matrice $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n_i, p_j)$. Alors la famille de ces matrices $M = (M_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq b}}$ peut être identifiée à une matrice possédant n lignes et p colonnes. On dit que M est une ***matrice décomposée en blocs***, de dimensions $(n_1, \ldots, n_a)$ et $(p_1, \ldots, p_b)$.

Définition. Avec ces notations, M est une ***matrice triangulaire supérieure par blocs*** si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$ tel que $i > j$, $M_{i,j} = 0$.
De même on définit la notion de matrice triangulaire inférieure par blocs.
La matrice $M = (M_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq b}}$ est une ***matrice diagonale par blocs*** si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b$ tel que $i \neq j$, $M_{i,j} = 0$.

8.3 Opérations sur les matrices blocs

Combinaison linéaire de matrices décomposées en blocs : Soient $M = (M_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq b}}$ et $N = (N_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq b}}$ deux matrices décomposées en blocs selon les mêmes partitions $(I_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(J_j)_{1\leq j\leq b}$ respectivement de $\mathbb{N}_n$ et de $\mathbb{N}_p$. Alors, $\forall u \in \mathbb{K}$, $uM + N = (uM_{i,j} + N_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq b}}$.
Produit matriciel de deux matrices décomposées en blocs : soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$**.**
Soit $M = (M_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq b}}$ une matrice décomposée en blocs selon les partitions $(I_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(J_j)_{1\leq j\leq b}$ respectivement de $\mathbb{N}_n$ et de $\mathbb{N}_p$. Soit $N = (N_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq b \\ 1\leq k\leq c}}$ une matrice décomposée en blocs selon **la même partition** $(J_j)_{1\leq j\leq b}$ de $\mathbb{N}_p$ et une partition $(K_k)_{1\leq k\leq c}$ de $\mathbb{N}_q$.

Alors MN peut être vue comme une matrice décomposée en blocs selon les partitions $(I_i)_{1\leq i\leq a}$ de $\mathbb{N}_n$ et $(K_k)_{1\leq k\leq c}$ de $\mathbb{N}_q$ et $MN = \left(\sum_{j=1}^{b} M_{i,j}N_{j,k}\right)_{\substack{1\leq i\leq a\\ 1\leq k\leq c}}$.
En résumé, le produit de deux matrices par blocs se comporte comme le produit matriciel usuel.

Application : Produit de matrices triangulaires (resp : diagonales) par blocs, puissances de telles matrices.

9 La notion de rang

9.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soient E un espace vectoriel et x une famille de vecteurs de E.
Le rang de x est $\text{rg}(x) \stackrel{\Delta}{=} \dim(\text{Vect}(x)) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété. Pour une famille x de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E,
- $\text{rg}(x) \leq \#(x)$. Lorsque $\text{rg}(x) < +\infty$, il y a égalité si et seulement si x est libre.
- $\text{rg}(x) \leq \dim(E)$. Lorsque $\text{rg}(x) < +\infty$, il y a égalité si et seulement si x est génératrice.

Propriété.
Soit $u \in L(E,F)$ et x une famille de vecteurs de E.
Alors $\text{rg}(u(x)) \leq \text{rg}(x)$, avec égalité lorsque $\text{rg}(x) < +\infty$ et u injective.

Propriété. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\text{rg}(x_i)_{i\in I}$ n'est pas modifié si l'on échange l'ordre de deux vecteurs, si l'on multiplie l'un des vecteurs x_i par un scalaire non nul, ou bien si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

9.2 Rang d'une application linéaire

Théorème. Soit $u \in L(E,F)$.
Si H est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E, alors $u|_H^{\text{Im}(u)}$ est un isomorphisme.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$: il s'agit du rang de l'application linéaire u.

Propriété. Si e est une base de E et $u \in L(E,F)$, alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e))$.

Formule du rang. Soit $u \in L(E,F)$ avec E de dimension finie.
Alors $\text{rg}(u)$ est fini et $\boxed{\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E)}$.

Propriété. Si $u \in L(E,F)$, alors $\text{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$. De plus,
lorsque E est de dimension finie, $\text{rg}(u) = \dim(E)$ si et seulement si u est injective
et lorsque F est de dimension finie, $\text{rg}(u) = \dim(F)$ si et seulement si u est surjective.

Théorème. $\text{rg}(v \circ u) \leq \inf(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.
On ne modifie par le rang d'une application linéaire en la composant avec un isomorphisme (à sa gauche ou à sa droite).

9.3 Rang d'une matrice

Définition. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, le rang de M est $\text{rg}(M) \stackrel{\Delta}{=} \text{rg}(\tilde{M}) = \dim(\text{Im}(M))$.

Le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Propriété. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $rg(M) = n$.

Propriété. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) \times \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$. Alors, $\mathrm{rg}(AB) \leq min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.
On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.
Il faut savoir le démontrer.

10 Matrice d'une application linéaire

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$. Soient $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Si $u \in L(E, F)$, on appelle ***matrice de l'application linéaire*** u dans les bases e et f la matrice notée $\mathrm{mat}(u, e, f) = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ définie par l'une des conditions équivalentes suivantes :
— pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $j \in \mathbb{N}_p$, $\alpha_{i,j}$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur $u(e_j)$ dans la base f.
— pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $j \in \mathbb{N}_p$, $[\mathrm{mat}(u, e, f)]_{i,j} = f_i^*(u(e_j))$.
— $\mathrm{mat}(u, e, f)$ est l'unique matrice $(\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ vérifiant : $\forall j \in \mathbb{N}_p \quad u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} f_i$.
— $\mathrm{mat}(u, e, f)$ est l'unique matrice dont la j-ème colonne, égale à $\Psi_f^{-1}(u(e_j))$, contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base f.

Interprétation tabulaire : Avec les notations précédentes,

$$\mathrm{mat}(u, e, f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \cdots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \ldots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} .$$

Notation. Lorsque $E = F$ et que l'on choisit $e = f$, on note $\mathrm{mat}(u, e)$ au lieu de $\mathrm{mat}(u, e, e)$.

Propriété. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, $\boxed{\mathrm{mat}(\tilde{M}, c, c') = M}$, en notant c et c' les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$.

Remarque. Nous disposons maintenant de deux manières équivalentes de définir l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$: c'est l'application $\begin{array}{rccc} \tilde{M} : & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & \tilde{M}(X) = MX \end{array}$, ou bien c'est l'unique application $\tilde{M} \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{mat}(\tilde{M}, c, c') = M$.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, munis de bases e et f et soit $u \in L(E, F)$. Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{mat}(u, e, f)) = \mathrm{rg}(u)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$. Soient $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
L'application $\begin{array}{ccc} L(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p) \\ u & \longmapsto & \mathrm{mat}(u, e, f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.