

DM 50 :  
Polynômes de Bernstein et théorème de  
Stone-Weierstrass

**Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.**

**Il n'est pas à rendre.**

**Un corrigé sera fourni le mardi 21 avril.**

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier naturel.

## Partie I : Polynômes de Bernstein

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $B_{n,k}(X)$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  suivant :

$$B_{n,k} = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

1°) Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

Déterminer le degré de  $B_{n,k}$  ainsi que ses racines et leurs multiplicités.

2°) Montrer que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$B_{n,k} = \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} X^j.$$

3°) Montrer que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $X^k = \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}(X)$ .

4°) On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . Montrer que la famille  $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

5°) Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , montrer que

$$\int_0^1 B_{n,k}(t) dt = \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}}.$$

6°) Soit  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . On pose  $Q(X) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_j B_{n,j} \in \mathbb{R}[X]$ .

Montrer que  $Q'(X) = n \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) \binom{n-1}{j} B_{n-1,j}$ .

7°) On reprend les notations de la question précédente.

Montrer que, pour tout  $r \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$Q^{(r)}(X) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \left( \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \alpha_{j+k} \right) \binom{n-r}{j} B_{n-r,j}.$$

## Partie II : Théorème de Stone-Weierstrass

Pour toute la suite du problème, on suppose que  $n$  est un entier strictement positif.

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $f \in \mathcal{C}$ , on pose  $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ . Ceci définit une norme sur le  $\mathbb{R}$ -espace

vectériel  $\mathcal{C}$ . On ne demande pas de démontrer cette propriété connue.

Pour tout  $f \in \mathcal{C}$ , on pose

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

On identifie un polynôme formel à coefficients réels avec son application polynomiale. Ainsi,  $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}$ .

8°) Calculer  $B_n(1)$ ,  $B_n(X)$  et  $B_n(X^2)$ .

9°) Montrer que  $B_n$  est un endomorphisme continu sur  $\mathcal{C}$ .

10°) Dans cette seule question, on suppose que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = e^x$ . Calculer  $B_n(f)$  et vérifier que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $B_n(f)(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ .

11°) Soit  $\delta > 0$  et  $x \in [0, 1]$ . On pose

$$S_{n,\delta}(x) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

En utilisant la question 8, montrer que  $0 \leq S_{n,\delta}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$ .

**12°)** Soit  $f \in \mathcal{C}$ . Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $\delta > 0$ ,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\|f\|S_{n,\delta}(x) + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| < \delta}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

En déduire que, dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ ,  $B_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ .

Ceci prouve que toute application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  est limite uniforme d'une suite de polynômes. C'est encore vrai pour des applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a < b$ . Il s'agit du théorème de Stone-Weierstrass.

**13°)** Soit  $f \in \mathcal{C}$ . Déduire de la question précédente que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(t) dt.$$

**14°)** Soit  $f \in \mathcal{C}$ . On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ .

Montrer que  $f = 0$ .

## Partie III : Convergence uniforme des dérivées

Dans cette partie, on fixe une application  $f$  dans  $\mathcal{C}$ .

**15°)** Soit  $r \in \{1, \dots, n\}$ . Donner une expression de  $[B_n(f)]^{(r)}$ , c'est-à-dire de la dérivée à l'ordre  $r$  du polynôme  $B_n(f)$ .

Lorsque  $f$  est croissante, montrer que  $B_n(f)$  est croissante.

Lorsque  $f$  est convexe, montrer que  $B_n(f)$  est convexe.

**16°)** On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$ . Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \left| (n+1) \left[ f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) \right] - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

**17°)** En déduire que, si  $f$  est de classe  $C^1$ , alors dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ ,  $[B_n(f)]' \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'$ .

**18°)** Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $g$  une application de classe  $C^r$  de  $[0, r]$  dans  $\mathbb{R}$ .

a) Déterminer un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , de degré inférieur ou égal à  $r$ , tel que pour tout  $k \in \{0, \dots, r\}$ ,  $P(k) = g(k)$ .

b) Montrer qu'il existe  $x \in ]0, r[$  tel que  $g^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} g(k)$ .

**19°)** Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que si  $f$  est de classe  $C^r$ , alors dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ ,  $[B_n(f)]^{(r)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f^{(r)}$ .

## Partie IV : Vitesse de convergence vers $f$

Dans cette partie, on fixe une application  $f$  dans  $\mathcal{C}$ .

Pour tout  $\delta \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| / (x, y \in [0, 1]) \wedge (|x - y| \leq \delta)\}$ .

Ainsi  $\omega$  est une application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

**20°)** Montrer que  $\omega$  est correctement définie, qu'elle est croissante et bornée.

**21°)** Montrer que pour tout  $\delta \geq 0$ , il existe  $(x, y) \in [0, 1]^2$  tel que  $|x - y| \leq \delta$  et  $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta)$ .

**22°)** Montrer que  $\omega(\delta) \xrightarrow[\delta > 0]{\delta \rightarrow 0} 0$ .

**23°)** Pour tout  $\delta > 0$  et  $x, y \in [0, 1]$ , montrer que  $|f(x) - f(y)| \leq \omega(\delta) \left(1 + \frac{|x - y|^2}{\delta^2}\right)$ .

**24°)** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|f - B_n(f)\| \leq \frac{5}{4} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

En déduire à nouveau que  $B_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ .