DM 51 : Théorème de Block et Thielmann
Centrale MP 2014

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le lundi 27 avril.

Partie I : Polynômes de Tchebychev

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
Les T_n sont les polynômes de Tchebychev de première espèce.

1°) Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3.

2°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$.

3°) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

4°) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de T_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n+1} T'_{n+1}$.
Les U_n sont les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

6°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

7°) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, énoncée en question 3.

8°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de U_n.

Partie II : Arithmétique des polynômes de Tchebychev

9°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$.
Lorsque $0 \leq m \leq n$, montrer que $T_m T_n = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m})$.
Lorsque $0 \leq m < n$, montrer que $T_m U_{n-1} = \frac{1}{2}(U_{n+m-1} + U_{n-m-1})$.

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, on note $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ les quotient et reste de la division euclidienne de T_n par T_m.

10°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m < n < 3m$.
Montrer que $Q_{n,m} = 2T_{n-m}$ et $R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$.

11°) Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

12°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 < m \leq n$.
On suppose que n n'est pas le produit de m par un entier impair.
Montrer qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que
$Q_{n,m} = 2(T_{n-m} - T_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1} T_{n-(2p-1)m})$ et $R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$.

Pour la suite de cette partie, on fixe deux entiers naturels n et m, non tous deux nuls.

13°) On note h le pgcd des entiers $m+1$ et $n+1$.
Montrer que U_{h-1} est un pgcd de U_n et U_m.

On note g le pgcd de n et de m. On pose $m_1 = \frac{m}{g}$ et $n_1 = \frac{n}{g}$.

14°) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_g est un pgcd de T_n et T_m.
Que se passe-t-il lorsque m_1 ou n_1 est pair ?

Partie III : Théorème de Block et Thielmann

Lorsque P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, on dit que P et Q commutent si et seulement si $P \circ Q = Q \circ P$.
Lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui commutent avec P.

On cherche dans cette partie les familles $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ suivante :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(F_n) = n$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $F_n \circ F_m = F_m \circ F_n$.

On note G l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $P_\alpha = X^2 + \alpha$.

15°) Montrer que les familles $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la condition $\mathcal{P}$.

16°) Montrer que G est un groupe pour la loi de composition $\circ$.
L'inverse pour la loi $\circ$ d'un élément U de G sera noté U^{-1}.

17°) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit Q un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ qui commute avec P_α.
Montrer que Q est unitaire.

18°) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α.
Déterminer $\mathcal{C}(X^2)$.

19°) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 2.
Justifier l'existence et l'unicité de $U \in G$ et de $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$.
Déterminer U et α lorsque $P = T_2$.

20°) Montrer que $\mathcal{C}(T_2) = \{-\frac{1}{2}\} \cup \{T_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

21°) Montrer que les seuls complexes α tels que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré 3 sont 0 et -2.

22°) En déduire le théorème de Block et Thielmann :
si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, alors il existe $U \in G$ tel que
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ F_n = U^{-1} \circ X^n \circ U$ ou $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ F_n = U^{-1} \circ T_n \circ U$.