

# DM 51 : un corrigé

Il s'agit du sujet Centrale 2014 MP, légèrement adapté et privé de sa dernière partie.

## Partie I : Polynômes de Tchebychev

1°) Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $1(\cos \theta) = 1 = \cos(0.\theta)$ ,  $X(\cos \theta) = \cos \theta$  et  $(2X^2 - 1)(\cos \theta) = \cos 2\theta$ , donc d'après l'unicité signalée par l'énoncé,  $\boxed{T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } T_2 = 2X^2 - 1}$ .

De plus  $\cos(3\theta) + \cos \theta = \cos(2\theta + \theta) + \cos(2\theta - \theta) = 2 \cos 2\theta \cos \theta$ , donc  $T_3 = 2(2X^2 - 1)X - X$ . Ainsi,  $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$ .

2°) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}((e^{i\theta})^n)$ , or d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(e^{i\theta})^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (i \sin \theta)^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (i \sin \theta)^{2k+1} (\cos \theta)^{n-2k-1},\end{aligned}$$

donc en passant aux parties réelles,

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin^2 \theta)^k (\cos \theta)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2 \theta)^k (\cos \theta)^{n-2k}.$$

Ainsi, par unicité, on obtient bien que  $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$ .

3°) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$\cos(n+2)\theta + \cos(n\theta) = \cos((n+1)+1)\theta + \cos((n+1)-1)\theta = 2 \cos((n+1)\theta) \cos \theta$ , donc  $\cos \theta$  est une racine du polynôme  $T_{n+2} + T_n - 2XT_{n+1}$ . Ainsi, ce polynôme est nul car il possède une infinité de racines. Ceci démontre que  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ .

4°) Si  $P$  est un polynôme non nul, notons  $\operatorname{dom}(P)$  le coefficient dominant de  $P$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On va démontrer par récurrence double la propriété suivante, notée  $R(n)$  :

$$\deg(T_n) = n \text{ et } \operatorname{dom}(T_n) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

$T_0 = 1$  et  $T_1 = X$ , donc  $R(0)$  et  $R(1)$  sont vraies.

Supposons que  $n \geq 0$  et que  $R(n)$  et  $R(n+1)$  sont vraies. Montrons  $R(n+2)$ .  
Alors  $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$  et  $\deg(T_n) = n$ , donc d'après le cours et la relation de la question précédente,  $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n))$ , car ces deux derniers degrés sont différents. Ainsi,  $\deg(T_{n+2}) = n+2$ . De plus, toujours d'après la relation de la question précédente,  $\text{dom}(T_{n+2}) = 2\text{dom}(T_{n+1}) = 2^{n+1}$ , car  $n+1 \geq 1$ .  
Ceci prouve  $R(n+2)$ . On conclut d'après le principe de récurrence.

5°) Lorsque  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on notera  $\text{Rac}(P)$  l'ensemble des racines réelles de  $P$ .  
Lorsque  $n = 0$ ,  $\boxed{\text{Rac}(T_0) = \emptyset}$ . Supposons maintenant que  $n \geq 1$ .

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .  $\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}$ .

En particulier, ceci montre que  $\left\{ \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right) / 0 \leq k \leq n-1 \right\} \subset \text{Rac}(T_n)$ .

Lorsque  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $0 < \frac{\pi + 2k\pi}{2n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$ ,

or l'application  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$ , donc lorsque  $h, k \in \{0, \dots, n-1\}$ , avec  $h \neq k$ , on a  $\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right) \neq \cos\left(\frac{\pi + 2h\pi}{2n}\right)$ . On a ainsi déjà trouvé  $n$  racines distinctes de  $T_n$ , or  $\deg(T_n) = n$ , donc  $T_n$  possède au plus  $n$  racines.

On a ainsi montré que  $\boxed{\text{Rac}(T_n) = \left\{ \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) / 0 \leq k \leq n-1 \right\}}$ .

6°) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . En dérivant la relation  $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta)$ , on obtient que  $-\sin \theta T'_{n+1}(\cos \theta) = -(n+1) \sin((n+1)\theta)$ , or  $\sin \theta \neq 0$  car  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ , donc  $\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(\cos \theta) = U_n(\cos \theta)$ , ce qu'il fallait démontrer.

7°) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

$\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) = \sin(((n+2)+1)\theta) + \sin(((n+2)-1)\theta) = 2 \sin((n+2)\theta) \cos \theta$ , donc en divisant par  $\sin \theta \neq 0$ ,  $U_{n+2}(\cos \theta) + U_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta U_{n+1}(\cos \theta)$ . Ainsi, le polynôme  $U_{n+2} + U_n - 2XU_{n+1}$  possède une infinité de racines, donc il est nul.

Ceci démontre que  $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$ .

8°) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

$\sin((n+1)\theta) = 0 \iff (n+1)\theta \equiv 0 [\pi]$ , donc  $\left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) / 1 \leq k \leq n \right\} \subset \text{Rac}(U_n)$ , or  $\deg(U_n) = \deg(T_{n+1}) - 1 = n$ , donc pour les mêmes raisons qu'en question 5,

$\boxed{\text{Rac}(U_n) = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) / 1 \leq k \leq n \right\}}$ .

## Partie II : Arithmétique des polynômes de Tchebychev

9°)  $\diamond$  Soit  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq m \leq n$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$\cos(n\theta + m\theta) + \cos(n\theta - m\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos(m\theta)$ , donc le polynôme  $T_{n+m} + T_{n-m} - 2T_n T_m$  admet  $\cos \theta$  pour racine. Ce polynôme possède donc une infinité de racines, donc il est nul (on appellera pour la suite cet argument le principe de rigidité des polynômes). Ainsi,  $T_m T_n = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m})$ .

◇ Soit  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq m < n$ . Alors  $n - m - 1 \in \mathbb{N}$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

$\sin((n+m)\theta) + \sin((n-m)\theta) = 2\cos(m\theta)\sin(n\theta)$ , donc

$(\sin\theta)U_{n+m-1}(\cos\theta) + (\sin\theta)U_{n-m-1}(\cos\theta) = 2T_m(\cos\theta)(\sin\theta)U_{n-1}(\cos\theta)$ , donc, en simplifiant par  $\sin\theta$  qui est non nul, puis en utilisant le principe de rigidité des polynômes, on obtient bien que  $T_m U_{n-1} = \frac{1}{2}(U_{n+m-1} + U_{n-m-1})$ .

**10°)** En reprenant le premier calcul de la question précédente, par parité de l'application  $\cos$ , on voit que, pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $T_m T_n = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{|n-m|})$ .

Soit maintenant  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $m < n < 3m$ . En appliquant ce qui précède en remplaçant le couple  $(n, m)$  par le couple  $(n-m, m)$  (on a bien  $n-m \in \mathbb{N}$ ), on obtient que (1) :  $T_n = T_{(n-m)+m} = 2T_m T_{n-m} - T_{|n-2m|}$ . Or  $\deg(T_{|n-2m|}) = |n-2m| < m$ , car  $n \in ]m, 3m[ = \{x \in \mathbb{R} / d(x, 2m) < m\}$  (où  $d$  désigne la distance usuelle dans  $\mathbb{R}$ ). Ainsi,  $\deg(T_{|n-2m|}) < \deg(T_m)$ , donc l'égalité (1) est la division euclidienne de  $T_n$  par  $T_m$ , ce qu'il fallait démontrer.

**11°)** Lors de la question précédente, pour montrer la relation (1), on a seulement eu besoin de supposer que  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $m \leq n$ .

Supposons maintenant que  $n = m(2p+1)$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

Alors  $m \leq n$  et la relation (1) devient :  $T_{m(2p+1)} = 2T_m T_{2pm} - T_{m(2p-1)}$ .

Par récurrence sur  $p$ , on en déduit que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  (on accepte la valeur  $p = 0$ ,

pour initialiser la récurrence),  $T_{m(2p+1)} = 2T_m \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} T_{2km} + (-1)^p T_m$ .

On en déduit que  $Q_{n,m} = (-1)^p + 2 \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} T_{2km}$  et  $R_{n,m} = 0$ .

**12°)** ◇ Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$|n - 2pm| < m \iff 2pm - m < n < 2pm + m \iff 2p - 1 < \frac{n}{m} < 2p + 1$ , donc

$|n - 2pm| < m \iff p - 1 < \frac{1}{2}(\frac{n}{m} - 1) < p$ . Posons  $x = \frac{1}{2}(\frac{n}{m} - 1)$  ( $m$  est supposé non nul).  $0 < m \leq n$ , donc  $x \geq 0$  et  $x \notin \mathbb{N}$  car  $\frac{n}{m}$  n'est pas un entier impair. Ainsi,  $|n - 2pm| < m \iff p = 1 + \lfloor x \rfloor$ . Ceci prouve qu'il existe un unique  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $|n - 2pm| < m$ , et que  $p = 1 + \lfloor \frac{1}{2}(\frac{n}{m} - 1) \rfloor$ .

◇ Par récurrence sur  $k \in \{0, \dots, p-1\}$ , en adaptant la question précédente, on montre

que  $R(k) : T_n = 2T_m \sum_{h=0}^{k-1} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^k T_{n-2km}$ .

En effet,  $R(0)$  est évidente, et si  $R(k)$  est vraie avec  $0 \leq k < p-1$ , alors d'après la relation (1),  $T_{n-2km} = 2T_m T_{n-(2k+1)m} - T_{n-2(k+1)m}$  (on a bien  $n - 2(k+1)m \geq 0$  car  $k+1 < p$ ), l'hypothèse de récurrence donne

$$\begin{aligned} T_n &= 2T_m \sum_{h=0}^{k-1} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^k (2T_m T_{n-(2k+1)m} - T_{n-2(k+1)m}) \\ &= 2T_m \sum_{h=0}^k (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^{k+1} T_{n-2(k+1)m}. \end{aligned}$$

En particulier,  $R(p-1)$  suivi d'une nouvelle utilisation de (1) donne :

$$\begin{aligned}
T_n &= 2T_m \sum_{h=0}^{p-2} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^{p-1} T_{n-2(p-1)m} \\
&= 2T_m \sum_{h=0}^{p-2} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^{p-1} (2T_m T_{n-(2p-1)m} - T_{|n-2pm|}),
\end{aligned}$$

Or  $\deg(T_{|n-2pm|}) = |n - 2pm| < m$ , donc l'égalité précédente est la division euclidienne de  $T_n$  par  $T_m$ .

On a ainsi montré que  $Q_{n,m} = 2 \sum_{h=0}^{p-1} (-1)^h T_{n-(2h+1)m}$  et que  $R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$ .

**13°)**  $\diamond$  D'après la question 8, les décompositions en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $U_n$  et  $U_m$  sont  $U_n = \text{dom}(U_n) \prod_{x \in \text{Rac}(U_n)} (X - x)$

et  $U_m = \text{dom}(U_m) \prod_{x \in \text{Rac}(U_m)} (X - x)$ , donc d'après le cours, un pgcd de  $U_n$  et  $U_m$  est égal

à  $\text{dom}(U_{h-1}) \prod_{x \in \text{Rac}(U_n) \cap \text{Rac}(U_m)} (X - x)$ . Le polynôme  $U_{h-1}$  étant scindé, il suffit donc de montrer que  $\text{Rac}(U_{h-1}) = \text{Rac}(U_n) \cap \text{Rac}(U_m)$ .

$\diamond$  Soit  $x \in \text{Rac}(U_{h-1})$ . D'après la question 8, il existe  $j \in \mathbb{N}_{h-1}$  tel que  $x = \cos\left(\frac{j\pi}{h}\right)$ .

Or  $h$  divise  $n + 1$ , donc il existe  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n + 1 = dh$ . alors  $x = \cos\left(\frac{jd\pi}{n+1}\right)$  et  $1 \leq jd < dh = n + 1$ , donc  $x \in \text{Rac}(U_n)$ . De même, on montre que  $x \in \text{Rac}(U_m)$ .

Ainsi,  $\text{Rac}(U_{h-1}) \subset \text{Rac}(U_n) \cap \text{Rac}(U_m)$ .

$\diamond$  Soit  $x \in \text{Rac}(U_n) \cap \text{Rac}(U_m)$ . Il existe  $k \in \mathbb{N}_n$  et  $k' \in \mathbb{N}_m$  tels que

$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{k'\pi}{m+1}\right). \text{ Par injectivité de } \cos \text{ sur } [0, \pi], \frac{k}{n+1} = \frac{k'}{m+1}.$$

D'après le cours, il existe  $d, d' \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n + 1 = hd$ ,  $m + 1 = hd'$  avec  $d$  et  $d'$  premiers entre eux. On a  $\frac{k'}{k} = \frac{m+1}{n+1} = \frac{d'}{d}$ , donc  $k'd = d'k$ . Ainsi,  $d$  divise  $d'k$ ,

puis d'après le lemme de Gauss,  $d$  divise  $k$  : il existe  $k'' \in \mathbb{N}^*$  tel que  $k = dk''$ . Alors  $x = \cos\left(\frac{k''\pi}{h}\right) \in \text{Rac}(U_{h-1})$ , car  $1 \leq k = dk'' < n + 1 = hd$ , donc  $1 \leq k'' < h$ .

Ainsi,  $\text{Rac}(U_n) \cap \text{Rac}(U_m) \subset \text{Rac}(U_{h-1})$ , ce qui conclut.

**14°)**  $\diamond$  Remarquons d'abord que  $g = 0 \iff n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{0\} \iff n = m = 0$ , or  $n$  et  $m$  sont non tous deux nuls, donc  $g \in \mathbb{N}^*$  et l'on peut définir  $m_1$  et  $n_1$ .

$\diamond$  On suppose d'abord que  $n_1$  et  $m_1$  sont impairs, donc  $n$  et  $m$  sont tous deux non nuls. En adaptant l'argument de la question précédente,

il s'agit de montrer que  $\text{Rac}(T_n) \cap \text{Rac}(T_m) = \text{Rac}(T_g)$ .

$\diamond$  Soit  $x \in \text{Rac}(T_g)$ .

D'après la question 8, il existe  $j \in \{0, \dots, g-1\}$  tel que  $x = \cos\left(\frac{2j+1}{2g}\pi\right)$ .

Or  $n = n_1g$ . donc  $x = \cos\left(\frac{(2j+1)n_1}{2n}\pi\right)$ .

De plus,  $n_1$  est impair, donc  $(2j+1)n_1$  est aussi impair : il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(2j+1)n_1 = 2k+1$ . Alors  $x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \in \text{Rac}(T_n)$ ,

car  $T_n(x) = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 0$ . De même, on montre que  $x \in \text{Rac}(T_m)$ .

Ainsi,  $\text{Rac}(T_g) \subset \text{Rac}(T_n) \cap \text{Rac}(T_m)$ .

◇ Soit  $x \in \text{Rac}(T_n) \cap \text{Rac}(T_m)$ . Il existe  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $k' \in \{0, \dots, m-1\}$  tels que  $x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2k'+1}{2m}\pi\right)$ . Par injectivité de  $\cos$  sur  $[0, \pi]$ ,

$$\frac{2k+1}{2n} = \frac{2k'+1}{2m}. \text{ En multipliant par } g, \text{ on obtient } \frac{2k+1}{2n_1} = \frac{2k'+1}{2m_1},$$

puis  $m_1(2k+1) = (2k'+1)n_1$ . Or d'après le cours,  $g = n \wedge m = g(n_1 \wedge m_1)$  et  $g \neq 0$ , donc  $n_1$  et  $m_1$  sont premiers entre eux. Alors, d'après le lemme de Gauss,  $n_1$  divise  $2k+1$  : il existe  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $2k+1 = n_1 a$ .  $a$  est nécessairement impair (sinon,  $2k+1$  serait pair),

donc il existe  $k'' \in \mathbb{N}$  tel que  $2k+1 = n_1(2k''+1)$ . Alors  $x = \cos\left(\frac{2k''+1}{2g}\right) \in \text{Rac}(T_g)$ .

Ainsi,  $\text{Rac}(T_n) \cap \text{Rac}(T_m) \subset \text{Rac}(T_g)$ , ce qui conclut.

◇ Supposons maintenant que  $n$  et  $m$  sont tous deux non nuls, mais que  $n_1$  ou  $m_1$  est pair. On a encore  $n_1 \wedge m_1 = 1$ , donc  $n_1$  et  $m_1$  ne sont pas tous deux pairs. Si  $x \in \text{Rac}(T_n) \cap \text{Rac}(T_m)$ , on a encore qu'il existe  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $k' \in \{0, \dots, m-1\}$  tels que  $m_1(2k+1) = (2k'+1)n_1$ . C'est impossible car l'un des membres de cette égalité est pair et l'autre est impair. Ainsi,  $\text{Rac}(T_n) \cap \text{Rac}(T_m) = \emptyset$ , ce qui prouve que  $T_n$  et  $T_m$  sont premiers entre eux. C'est bien sûr encore le cas lorsque  $n = 0$  ou  $m = 0$ .

### Partie III : Théorème de Block et Thielmann

**15°)** On sait déjà que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(T_n) = n$  et bien sûr  $\deg(X^n) = n$ .

Soit  $n, m \in \mathbb{N}$ . Alors  $X^n \circ X^m = X^{nm} = X^m \circ X^n$ , donc  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Alors  $T_n \circ T_m(\cos \theta) = T_n(\cos(m\theta)) = \cos(nm\theta)$  et  $T_m \circ T_n(\cos \theta) = \cos(mn\theta)$ .

Ainsi,  $T_n \circ T_m - T_m \circ T_n$  est un polynôme admettant une infinité de racines, donc il est nul, ce qui prouve que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

**16°)** Soit  $U, V \in G$ . Il existe  $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$  tels que  $U = aX + b$ ,  $V = a'X + b'$ ,  $a \neq 0$  et  $a' \neq 0$ . Alors  $U \circ V(X) = U(a'X + b') = a(a'X + b') + b = aa'X + ab' + b$ , or  $aa' \neq 0$ , donc  $U \circ V \in G$ . Ainsi, la loi  $\circ$  est interne sur  $G$ . De plus, d'après le cours, elle est associative sur  $\mathbb{C}[X]$ , donc en particulier sur  $G$ .

$U \circ X = U = X \circ U$  et  $X \in G$ , donc  $X$  est un élément neutre.

Posons  $W = \frac{1}{a}X - \frac{b}{a}$ . Alors  $W \circ U = \frac{1}{a}(aX + b) - \frac{a}{b} = X$  et  $U \circ W = a\left(\frac{1}{a}X - \frac{b}{a}\right) + b = X$ , or  $W \in G$ , donc  $U$  admet un symétrique pour  $\circ$  dans  $G$  et on a  $\boxed{U^{-1} = \frac{1}{a}X - \frac{b}{a}}$ .

En conclusion,  $G$  est un groupe pour la loi de composition  $\circ$ .

**17°)**  $P_\alpha(Q) = Q^2 + \alpha$  et  $Q \circ P_\alpha = Q(X^2 + \alpha)$ , donc  $Q^2 + \alpha = Q(X^2 + \alpha)$ .

$Q$  étant non constant,  $\text{dom}(Q^2 + \alpha) = \text{dom}(Q^2) = \text{dom}(Q)^2$  (en effet, en passant aux coefficients, on peut montrer que si  $R$  et  $S$  sont deux polynômes non nuls de  $\mathbb{C}[X]$ ,

alors  $\text{dom}(RS) = \text{dom}(R)\text{dom}(S)$ , or, à nouveau en passant aux coefficients, on voit que  $\text{dom}(Q(X^2 + \alpha)) = \text{dom}(Q)$ , donc  $\text{dom}(Q)^2 = \text{dom}(Q)$  et  $\text{dom}(Q) \neq 0$ . Ainsi,  $\text{dom}(Q) = 1$ , ce qui prouve que  $Q$  est un polynôme unitaire.

**18°)**  $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons qu'il existe deux polynômes distincts  $Q$  et  $H$  de degré  $n$  qui commutent avec  $P_\alpha$ .

On a  $Q^2 + \alpha = Q(X^2 + \alpha)$  et  $H^2 + \alpha = H(X^2 + \alpha)$ , donc en formant la différence de ces deux égalités,  $(Q - H)(Q + H) = (Q - H)(X^2 + \alpha)$ . Alors, en passant aux degrés, on en déduit que (1) :  $\deg(Q - H) + \deg(Q + H) = 2\deg(Q - H)$ .

$Q$  et  $H$  sont de degré  $n \geq 1$ , donc ils ne sont pas constants. Alors, d'après la question précédente,  $Q$  et  $H$  sont unitaires. On en déduit que  $\deg(Q + H) = n$  et que  $\deg(Q - H) < n$ . Or  $Q - H$  est supposé non nul, donc  $\deg(Q - H) \in \mathbb{N}$ . Alors l'égalité (1) montre que  $\deg(Q - H) = \deg(Q + H) = n$ , ce qui est contradictoire. Ainsi, on a montré qu'il existe au plus un polynôme de degré  $n$  qui commute avec  $P_\alpha$ .

$\diamond$  Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'après la question 15,  $X^n \in \mathcal{C}(X^2)$ , donc lorsque  $n \geq 1$ , d'après le point précédent,  $X^n$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n$  qui commute avec  $X^2$ .

Si  $P$  est un polynôme constant,  $P \circ X^2 = P$  et  $X^2 \circ P = P^2$ , donc les polynômes constants qui commutent avec  $X^2$  sont exactement 0 et 1.

En conclusion,  $\boxed{\mathcal{C}(X^2) = \{0\} \cup \{X^n / n \in \mathbb{N}\}}$ .

**19°)**  $\diamond$  Posons  $P(X) = aX^2 + bX + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$  et  $a \neq 0$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  et soit  $U = \beta X + \gamma \in G$  avec  $\beta \neq 0$ .

En composant à droite par  $U$  ou  $U^{-1}$ ,  $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha \iff U \circ P = P_\alpha \circ U$ , donc

$$\begin{aligned} U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha &\iff \beta(aX^2 + bX + c) + \gamma = (\beta X + \gamma)^2 + \alpha \\ &\iff [\beta a = \beta^2, \beta b = 2\beta\gamma, \beta c + \gamma = \gamma^2 + \alpha], \end{aligned}$$

or  $\beta \neq 0$ , donc  $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha \iff [\beta = a, \gamma = \frac{b}{2}, \alpha = ac + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{4}]$ .

Ainsi, il existe un unique couple  $(U, \alpha) \in G \times \mathbb{C}$  tel que  $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$ .

De plus,  $\boxed{U = aX + \frac{b}{2} \text{ et } \alpha = ac + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{4}}$ .

$\diamond$  Avec  $P = T_2 = 2X^2 - 1$ , on obtient  $\boxed{U = 2X \text{ et } \alpha = -2}$ .

**20°)** D'après la question 15, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  commute avec  $T_2$ .

De plus,  $(-\frac{1}{2}) \circ T_2 = -\frac{1}{2}$  et  $T_2 \circ (-\frac{1}{2}) = (2X^2 - 1)(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ ,

donc  $\{-\frac{1}{2}\} \cup \{T_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(T_2)$ .

Il reste à établir l'inclusion réciproque.

Soit  $P \in \mathcal{C}(T_2)$ . Supposons d'abord que  $P$  est constant. Alors

$P \circ T_2 = P$  et  $T_2 \circ P = 2P^2 - 1$ , donc  $0 = 2P^2 - P - 1 = (P - 1)(2P + 1)$ . Ainsi,  $P = 1 = T_0$  ou bien  $P = -\frac{1}{2}$ .

Supposons maintenant que  $\deg(P) = n \geq 1$ .

Posons  $U = 2X$  et  $\alpha = -2$ . Ainsi, d'après la question précédente, en utilisant la notation multiplicative usuelle pour la loi  $\circ$ , qui est associative,

on a  $UT_2U^{-1} = P_\alpha$  et donc  $T_2 = U^{-1}P_\alpha U$ .

$PT_2 = T_2P$ , donc  $P(U^{-1}P_\alpha U) = (U^{-1}P_\alpha U)P$ , puis  $(UPU^{-1})P_\alpha = P_\alpha(UPU^{-1})$ . Ainsi  $UPU^{-1} \in \mathcal{C}(X^2 - 2)$ .

Ce calcul est également valable en remplaçant  $P$  par  $T_n$ , car  $T_n$  commute avec  $T_2$ , donc  $UT_nU^{-1}$  commute également avec  $X^2 - 2$ . Or  $UT_nU^{-1}$  et  $UPU^{-1}$  sont de degré  $n \geq 1$ , donc d'après la question 18, ils sont égaux. On en déduit que  $P = T_n$ .

Ainsi, dans tous les cas,  $P \in \{-\frac{1}{2}\} \cup \{T_n / n \in \mathbb{N}\}$ , ce qui conclut.

**21°)**  $T_3$  commute avec  $T_2$ , donc avec les notations de la question précédente,  $UT_3U^{-1}$  commute avec  $X^2 - 2 = P_{-2}$ . Ainsi  $\mathcal{C}(P_{-2})$  contient  $UT_3U^{-1}$  qui est de degré 3. De plus,  $\mathcal{C}(P_0) = \mathcal{C}(X^2)$  contient  $X^3$ , donc 0 et  $-2$  sont bien des complexes  $\alpha$  tels que  $\mathcal{C}(P_\alpha)$  contient un polynôme de degré 3.

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{C}(P_\alpha)$  contienne un polynôme de degré 3, que l'on notera  $P$ . D'après la question 17,  $P$  est unitaire. Posons  $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . On a  $P \circ P_\alpha = P_\alpha \circ P$ ,

donc  $(X^2 + \alpha)^3 + a(X^2 + \alpha)^2 + b(X^2 + \alpha) + c = (X^3 + aX^2 + bX + c)^2 + \alpha$ , c'est-à-dire  $X^6 + 3\alpha X^4 + 3\alpha^2 X^2 + \alpha^3 + aX^4 + 2a\alpha X^2 + a\alpha^2 + bX^2 + b\alpha + c = X^6 + a^2 X^4 + b^2 X^2 + c^2 + 2(aX^5 + bX^4 + cX^3 + abX^3 + acX^2 + bcX) + \alpha$ .

En égalant les coefficients de degré 5, on obtient  $0 = 2a$ , donc  $a = 0$ , puis en égalant les coefficients de degré 3,  $0 = 2c$ , donc  $c = 0$ . Alors l'égalité polynomiale devient :  $X^6 + 3\alpha X^4 + 3\alpha^2 X^2 + \alpha^3 + bX^2 + b\alpha = X^6 + b^2 X^2 + 2bX^4 + \alpha$ , donc

$3\alpha = 2b$ ,  $3\alpha^2 + b = b^2$  et  $\alpha^3 + b\alpha = \alpha$ .

Ainsi,  $b = \frac{3}{2}\alpha$  et  $3\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha = \frac{9}{4}\alpha^2$ . D'après la dernière équation,  $\alpha = 0$  ou  $\alpha + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\alpha$ , c'est-à-dire  $\alpha = -2$ , ce qui conclut.

**22°)** Supposons que  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

$F_2$  est de degré 2, donc d'après la question 19, il existe  $U \in G$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $UF_2U^{-1} = P_\alpha$ .

$F_2$  et  $F_3$  commutent, donc  $UF_3U^{-1}$  commute avec  $UF_2U^{-1} = P_\alpha$ , or  $UF_3U^{-1}$  est de degré 3, donc d'après la question précédente,  $\alpha \in \{0, -2\}$ .

*Premier cas :* Supposons que  $\alpha = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $F_n$  commute avec  $F_2$ , donc  $UF_nU^{-1}$  commute avec  $P_\alpha = X^2$ , or  $UF_nU^{-1}$  est de degré  $n$ , donc d'après la question 18,  $UF_nU^{-1} = X^n$ , puis  $F_n = U^{-1}X^nU$ .

*Second cas :* Supposons que  $\alpha = -2$ . En posant  $V = 2X$ , on a vu que  $T_2 = V^{-1}P_\alpha V$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $F_n$  commute avec  $F_2$ , donc  $UF_nU^{-1}$  commute avec  $P_\alpha = X^2 - 2 = VT_2V^{-1}$ . Ainsi,  $V^{-1}(UF_nU^{-1})V$  commute avec  $V^{-1}(VT_2V^{-1})V = T_2$ , or  $V^{-1}(UF_nU^{-1})V$  est de degré  $n$ , donc d'après les questions 18 et 20,  $V^{-1}(UF_nU^{-1})V = T_n$ . Posons  $W = V^{-1}U$ . On a montré que  $WF_nW^{-1} = T_n$ , où  $W \in G$  (car  $G$  est un groupe) et où  $W$  ne dépend pas de  $n$ , ce qui conclut.