

## Feuille d'exercices 22.

### Corrigé de quelques exercices.

#### Exercice 22.15 :

1°) Notons  $e = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , notons  $u_{i,j}$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans  $e$  est  $E_{i,j}$ .

Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $u_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j}e_i$ .

Soit  $l \in \{1, \dots, n\}$ .  $u_{i,j} \circ u_{h,k}(e_l) = u_{i,j}(\delta_{k,l}e_h) = \delta_{k,l}\delta_{j,h}e_i$ ,  
donc  $u_{i,j} \circ u_{h,k}(e_l) = \delta_{j,h}u_{i,k}(e_l)$ .

Ainsi,  $u_{i,j} \circ u_{h,k} = \delta_{j,h}u_{i,k}$ , puis en prenant les matrices de ces endomorphismes,  
 $E_{i,j}E_{h,k} = \delta_{j,h}E_{i,k}$ .

2°) Pour  $i \neq j$ ,  $\sigma(E_{i,j}) = \sigma(E_{i,j}E_{j,j}) = \sigma(E_{j,j}E_{i,j}) = 0$ .

3°)  $\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{i,j}E_{j,i}) = \sigma(E_{j,i}E_{i,j}) = E_{j,j}$ .

4°) Soit  $M = (M_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$\sigma(M) = \sigma\left(\sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} M_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} M_{i,j}\sigma(E_{i,j}) \text{ car } \sigma \text{ est linéaire.}$$

$$\text{Ainsi d'après les questions précédentes, } \sigma(M) = \sigma(E_{1,1}) \sum_{i=1}^n M_{i,i} = \lambda \text{Tr}(M)$$

où  $\lambda = \sigma(E_{1,1})$ .

On a montré que  $\{\sigma \in L(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) / \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sigma(AB) = \sigma(BA)\} \subset \mathbb{R}.Tr$ .

L'inclusion réciproque est vraie car on sait que pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ , ce que l'on peut redémontrer :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}B_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{j,i}A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (BA)_{j,j} = \text{Tr}(BA).$$

#### Exercice 22.16 :

$\sin(i+j) = \sin i \cos j + \cos i \sin j$ , donc en posant  $S = \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix}$ , la

$j$ -ème colonne de la matrice  $M$  de l'énoncé vaut  $C_j = (\cos j)S + (\sin j)C$ . Ainsi l'espace vectoriel engendré par les colonnes de  $M$  est inclus dans  $\text{Vect}(C, S)$ , ce qui prouve que  $\text{rg}(M) \leq 2$ .

Si  $n = 1$ , clairement  $\text{rg}(M) = 1$ .

Supposons que  $n \geq 2$ . On peut alors extraire de  $M$  la matrice  $\begin{pmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{pmatrix}$  qui est inversible car de déterminant non nul. Ainsi  $\text{rg}(M) \geq 2$ , puis  $\text{rg}(M) = 2$ .

---

**Exercice 22.18 :**

[ Il s'agit d'adapter la démonstration de l'existence et de l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange.]

$$\begin{array}{l} \text{Notons } \varphi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P \longmapsto (P^{(j)}(a_i))_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq n_i - 1}} \end{array} .$$

$\varphi$  est une application linéaire.

Si  $\varphi(P) = 0$ ,  $P$  admet au moins  $n$  racines (en les comptant avec multiplicité), or  $P$  est de degré strictement inférieur à  $n$ , donc  $P = 0$ . Ainsi  $\varphi$  est injective, mais  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  et  $\mathbb{K}^n$  sont de même dimension, donc  $\varphi$  est un isomorphisme. Ainsi il existe un unique  $u \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $\varphi(u) = (u_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq n_i - 1}}$ .

**Exercice 22.24 :**

1°)

◇ Supposons que  $A$  est monotone.

Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $AX \geq 0$ . En notant  $X_{i,1}$  le  $i$ -ème coefficient du vecteur colonne

$X$ , on a  $X_{i,1} = [A^{-1}AX]_{i,1} = \sum_{j=1}^n [A^{-1}]_{i,j} [AX]_{j,1}$ , donc  $X_{i,1} \geq 0$ , car  $A^{-1}$  est positive et

car  $AX$  est positif. Ainsi  $X \geq 0$ .

◇ Réciproquement, supposons que pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ , si  $AX$  est positif, alors  $X$  est aussi positif.

Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $AX = 0$ . Alors  $AX \geq 0$  et  $A(-X) \geq 0$ , donc  $X \geq 0$  et  $-X \geq 0$ , ce qui implique  $X = 0$ . Ceci prouve que  $A$  est inversible.

Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$  : Posons  $Y = (\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $A^{-1}Y$  est égal à la  $j$ -ème colonne de  $A^{-1}$ . Or  $Y \geq 0$  et  $Y = A(A^{-1}Y)$ , donc d'après l'hypothèse,  $A^{-1}Y \geq 0$ . On a montré que toutes les colonnes de  $A^{-1}$  sont positives, donc  $A^{-1}$  est bien une matrice positive.

2°) Supposons par l'absurde que  $A$  n'est pas une matrice monotone. D'après la première question, il existe  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $AX \geq 0$  avec  $X$  non positive. Posons  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et convenons que  $x_0 = x_{n+1} = 0$ . Ainsi, le  $i$ -ème coefficient de  $AX$  vaut  $-x_{i-1} + (2 + a_i)x_i - x_{i+1}$ . Il est positif par hypothèse alors qu'il existe  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i < 0$ .

On a  $-x_{i_0-1} + (2 + a_{i_0})x_{i_0} - x_{i_0+1} \geq 0$ , donc  $-x_{i_0-1} - x_{i_0+1} \geq (2 + a_{i_0})(-x_{i_0}) \geq 2(-x_{i_0})$ , car  $-x_{i_0} > 0$  et  $a_{i_0} \geq 0$ , mais par définition de  $i_0$ , on a  $x_{i_0-1} + x_{i_0+1} \geq 2x_{i_0}$ , donc  $x_{i_0-1} + x_{i_0+1} = 2x_{i_0}$ , c'est-à-dire :  $(x_{i_0-1} - x_{i_0}) + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) = 0$ . Or  $x_{i_0-1} - x_{i_0}$  et  $x_{i_0+1} - x_{i_0}$  sont positifs, donc ils sont tous deux nuls. Ainsi,  $x_{i_0-1} = x_{i_0} = x_{i_0+1}$ .

On a donc montré que si le minimum de  $\{x_i/1 \leq i \leq n\}$  est atteint en  $i_0$ , il est aussi atteint en  $i_0 - 1$ . Par récurrence, on en déduit que ce minimum est atteint en  $x_0$ , ce qui est faux car  $x_0 = 0$ .

Ainsi  $A$  est monotone.