# DM 56 : corrigé

**Ce sujet est tiré de Centrale PC 2016, avec quelques aménagements mineurs.**

## I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

### I.A - L'opérateur de translation

**I.A.1)** $\diamond$ **Soit** $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ **et** $\alpha \in \mathbb{R}$. $\tau(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(X+1)$ **et d'après le cours,** $\tau(\alpha P + Q) = \alpha P(X+1) + Q(X+1) = \alpha\tau(P) + \tau(Q)$. **Ainsi** $\tau$ **est une application linéaire, de** $\mathbb{R}_n[X]$ **dans lui-même, donc c'est bien un endomorphisme.**

$\diamond$ **Soit** $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, **un polynôme non nul de** $\mathbb{R}_n[X]$, **de degré** $d = \deg(P)$ (**i.e.** $a_d \neq 0$).

**Alors,** $\tau(P)$ **est de la forme :**

$$\tau(P) = P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

**Comme** $a_d \neq 0$ **:**

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)}$$

**I.A.2)** **Notons que** $\tau^0(P) = P$.
**Et que si** $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, **alors** $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
**Ainsi, par récurrence**

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

**I.A.3)** **D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable** $i = h+1$**),**

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

$M$ **est donc triangulaire supérieure et les coefficients de** $M$ **vérifient**

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1, n+1]\!],\ (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

**I.A.4)** $\diamond$ **Soit** $\lambda \in \mathbb{R}$. **Supposons que** $\lambda$ **est une valeur propre de** $\tau$. **Alors il existe** $P \in \mathbb{R}_n[X]$ **tel que** $P \neq 0$ **et** $\tau(P) = \lambda P$. **On en déduit que** $cd(\tau(P)) = \lambda cd(P)$, **or** $cd(\tau(P)) = cd(P) \neq 0$, **donc** $\lambda = 1$. **Ainsi,** $\tau$ **admet au plus une valeur propre, égale à 1.**

**Réciproquement, en prenant** $P = 1$, $\tau(P) = P$ **et** $P \neq 0$, **donc** $\tau$ **possède une unique valeur propre, égale à** $1$.

$\diamond$ **Soit** $P \in \mathbb{R}_n[X]$ **un vecteur propre de** $\tau$. **Alors** $P \neq 0$ **et** $P(X) = \tau(P) = P(X+1)$. **On en déduit que, pour tout** $k \in \mathbb{N}$, $P = \tau^k(P) = P(X+k)$, **donc substituant** $X$ **par** $0$, $P(0) = P(k)$, **pour tout** $k \in \mathbb{N}$. **Ainsi** $P - P(0)$ **possède une infinité de racines, donc il est identiquement nul. Donc** $P$ **est un polynôme constant, c'est-à-dire un réel.**

**Supposons que** $\tau$ **est diagonalisable. Alors** $\mathbb{R}_n[X]$ **possède une base de vecteurs propres, donc une base constituée de vecteurs de** $\mathbb{R}$. **Ainsi,** $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}$ **et** $n \leq 0$, **ce qui est faux. Ainsi** $\tau$ **n'est pas diagonalisable.**

**I.A.5)** **Notons** $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ **défini par** $\overline{\tau}(P(X)) = P(X-1)$.
**On vérifie que** $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ **:**

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau(\overline{\tau}(P))(X) = \overline{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\overline{\tau}(P))(X)$$

**Donc $\tau$ est une bijection et**

$$\boxed{\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)}$$

**Puis, comme pour la question** 2)**, on montre que pour tout** $k \in \mathbb{N}$**,** $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$**.**
**Donc la formule est toujours vraie :**

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

**I.A.6) Avec l'expression de $\tau^{-1}$, on applique la même méthode qu'en** 3) **et on obtient :**

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

**Puis**

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

**I.A.7) Posons $U$ le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les composantes sont $u_0, \ldots, u_n$ et $V$ le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les composantes sont $v_0, \ldots, v_n$. La $k+1^{\text{e}}$ ligne de l'égalité $V = Q \times U$ s'écrit**

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$$

**On peut identifier (après changement d'indice) :** $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**On a donc**

$$\boxed{Q = M^T}$$

**I.A.8) $M$ est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.**
**Puis par équivalence :** $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$**.**
**La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors**

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})^T\right)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})\right)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1} v_j$$

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j}$$

**I.A.9) On a alors**

$$\boxed{v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k}$$

**On vérifie bien :**

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k}$$

## I.B - L'opérateur de différence

**I.B.1) Avec les mêmes notations qu'en** $1.A.1)$, **avec** $P$ ***non constant*** **on a :**

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = d a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

**Comme** $a_d \neq 0$ **:**

$$\boxed{\textbf{si } P\textbf{, non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \textbf{ et } \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)}$$

**I.B.2) D'après la question précédente, si** $P$ **n'est pas constant,** $\deg(P) \geqslant 1$ **et** $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$**, donc** $\delta(P)$ **n'est pas nul. Ainsi, si** $\delta(P) = 0$**, alors** $P$ **est constant.**
**Réciproquement, si** $P$ **est constant, le calcul (simple) donne** $\delta(P) = 0$.
**Donc**

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

**La question précédente montre aussi que** $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
**Or d'après le théorème du rang :** $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
**Donc :**

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

**I.B.3) Démontrons par récurrence que, pour tout** $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
**L'initialisation, pour** $j = 1$ **résulte de la question précédente.**
$\diamond$ **Pour** $j$ **tel que** $1 \leq j < n$**, supposons que** $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
**Alors** $\mathrm{Im}(\delta^{j+1}) = \delta^{j+1}(\mathbb{R}_n[X]) = \delta(\delta^j(\mathbb{R}_n[X])) = \delta(\mathrm{Im}(\delta^j))$**, donc** $\mathrm{Im}(\delta^{j+1}) = \delta(\mathbb{R}_{n-j}[X])$**, mais d'après la question précédente, pour tout** $p \in \mathbb{N}^*$, $\delta(\mathbb{R}_p[X]) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$,
**donc** $\mathrm{Im}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$**, ce qui prouve la propriété à l'ordre** $j + 1$.
**Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout** $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
$\diamond$ **Lorsque** $\deg(P) \geq 1$**, on a vu que** $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$**, et lorsque** $\deg(P) \leq 0$, $\delta(P) = 0$.
**On en déduit par récurrence que, pour tout** $j \in \mathbb{N}^*$**, si** $\deg(P) \geq j$**, alors** $\deg(\delta^j(P)) = \deg(P) - j$ **et si** $\deg(P) \leq j - 1$**, alors** $\delta^j(P) = 0$.
**Soit** $j$ **tel que** $1 \leq j \leq n$.
**Si** $\deg(P) \geq j$**, alors** $\deg(\delta^j(P)) = \deg(P) - j \geq 0$**, donc** $\delta^j(P) \neq 0$ **et** $P \notin \ker(\delta^j)$.
**Au contraire, lorsque** $\deg(P) \leq j - 1$, $\delta^j(P) = 0$**. En conclusion,** $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

**I.B.4) Par construction,** $\delta = \tau - \mathrm{id}$**, or** $id$ **et** $\delta$ **commutent, donc d'après la formule de Newton**

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j}$$

**I.B.5) Si** $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$**, alors** $\delta^n(P) = 0$**. Donc :**

$$0 = [\delta^n(P)](X) = [\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)](X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X + j)$$

**Et en particulier en remplaçant** $X$ **par 0 :**

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

**I.B.6) a)** $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.
**Donc**

$$\boxed{u \textbf{ et } \delta^2 \textbf{ commutent}}$$

**b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors**

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

**Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.**
**Par conséquent**

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

**c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors**

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$ ; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.**
**Donc**

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

**d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par $u$, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.**
**Considérons alors $A$, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $(P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.**
**Alors $A^2$ est égale à la matrice de la restriction de $\delta$ sur $\mathbf{R}_1[X]$ donc à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.**
**Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc**

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

**I.B.7) a) On a vu (question $I.B.3$)) que pour $0 \le i \le d$, $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.**
**Ainsi, la famille $(\delta^d(P), \delta^{d-1}(P), \dots P)$ est une famille de degrés échelonnés.**

**Alors la matrice de cette famille de vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}_d[X]$ est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible, ce qui prouve d'après le cours que $(\delta^d(P), \delta^{d-1}(P), \dots P)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ (elle est libre et possède bien $d+1$ vecteurs et $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension $d+1$).**

**En conclusion, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ engendre $\mathbb{R}_d[X]$.**

**b) Soit $V$ un sous-espace vectoriel non nul stable par $\delta$.**
**$\{\deg(P) \,/\, P \in V \setminus \{0\}\}$ est non vide et majoré par $n$, donc il possède un maximum, que l'on notera $d$. Déjà, pour tout $P \in V$, $\deg(P) \le d$, donc $V \subset \mathbb{R}_d[X]$.**

**De plus, il existe $P \in V \setminus \{0\}$ tel que $\deg(P) = d$. Alors, $V$ étant stable par $\delta$, $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de vecteurs de $V$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) \subset V$, donc $\mathbb{R}_d[X] \subset V$.**

**En conclusion, $V = \mathbb{R}_d[X]$.**

# II Applications en combinatoire

## II.A - Quelques cas particuliers

**II.A.1) Si $\varphi$ est une surjection de $E$ sur $F$, alors nécessairement $\#F \leqslant \#E$. Donc**

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p,n) = 0}$$

**II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal $n$ sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc**

$$\boxed{S(n,n) = n!}$$

**II.A.3)** **Les surjections de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $[\![1,n]\!]$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :**

- **Le choix de deux éléments de $\mathbb{N}_{n+1}$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités**
- **Puis, la distribution des $n$ éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les $n$ éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités**

**Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :**

$$\boxed{S(n+1,n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n\times(n+1)!}{2}}$$

### II.B - Recherche d'une expression générale

**II.B.1)** **Une application de $E = \mathbb{N}_p$ sur un ensemble $F = [\![1,n]\!]$ est parfaitement définie -et de manière unique- par la donnée pour chacun des $p$ éléments de $E$ d'un unique élément de $F$. Ainsi,**

$$\boxed{\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } [\![1,n]\!] \text{ est } n\times n\cdots\times n = n^p}$$

**II.B.2)** **Notons $I_k = \{\varphi : \mathbb{N}_p \to [\![1,n]\!] \ / \ \#\varphi(\mathbb{N}_p) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :**

$$n^p = \sum_{k=1}^{n} \# I_k$$

**Il reste à dénombrer $I_k$. Or les applications $\varphi$ de $I_k$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :**

- **Le choix de $k$ éléments de $\mathbb{N}_n$ qui forment $\varphi(\mathbb{N}_p)$ : $\binom{n}{k}$ possibilités**
- **Puis, le choix des surjections de $\mathbb{N}_p$ sur l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}_p)$ à $k$ éléments : $S(p,k)$ possibilités**

**Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est**

$$\boxed{n^p = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S(p,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p,k)}$$

**avec la convention $S(p,0) = 0$.**

**II.B.3)** **On applique alors la formule d'inversion trouvée en $I.A.8$), ($p$ constant)**

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \Longleftrightarrow u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

**avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p,k)$, donc**

$$\boxed{\forall p \geqslant n,\ S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

**II.B.4)** **Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après $I.B.5$),**

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p,n)$$

**On peut donc généraliser, de manière cohŕente, la formule obtenue à la question précédente :**

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

**II.C)** **Avec les questions précédentes :**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n,n) = n! \quad \textbf{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1,n) = \frac{n\times(n+1)!}{2}}$$

# III Etude d'une famille de polynômes

## III.A - Généralités

**III.A.1) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(H_k) = k$.**

**Donc la famille $(H_0, H_1, \ldots H_n)$ est une famille de degrés échelonnés, donc (cf question I.B.7.a) elle est libre.**

**Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc**

$$\boxed{(H_0, H_1, \ldots H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

**III.A.2) $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.**

**Et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,**

$$\delta(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right) = \frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) - (X-k+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)$$

$$\delta(H_k) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)((X+1)-(X-k+1)) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right) \times k = H_{k-1}$$

**Bilan :**

$$\boxed{\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ \delta(H_k) = H_{k-1}}$$

**III.A.3) Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.**

**Ainsi la matrice de $\tau$ dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n$ est égale à**

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

**III.A.4) À partir de la question III.A.2, on en déduit par récurrence sur $\ell$ que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, si $k < \ell$ alors $\delta^\ell(H_k) = 0$ et si $k \geq \ell$ alors $\delta^\ell(H_k) = H_{k-\ell}$.**

**Soit $k$ et $\ell$ tels que $0 \leq k, \ell \leq n$.**

**Si $k > \ell$, alors $\delta^k(H_\ell) = 0$, donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 0$.**

**Si $k = \ell$, alors $\delta^\ell(H_\ell) = H_0$, donc $\delta^\ell(H_\ell)(0) = 1$.**

**Enfin, si $k < \ell$, alors $\delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k}$, donc $\delta^k(H_\ell)(0) = H_{\ell-k}(0)$, car $\ell - k \geq 1$.**

**III.A.5) Puisque $(H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,**

**il existe $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell H_\ell$.**

**Puis, par linéarité :**

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

**Donc**

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k}$$

### III.B - Étude d'un exemple

**III.B.1) Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.**
**Il s'agit de calculer $\delta^k(T)(0)$, pour $k$ de $0$ à $3$. Or**

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7\,,\ \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8\,,\ \delta^2(T)(X) = 6X + 10\,,\ \delta^3(T)(X) = 6$$

**On a donc**

$$\boxed{T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

**III.B.2) Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :**

$$\boxed{\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

**III.B.3) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(n)$, où $P$ est le polynôme de la question précédente. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k = P(k+2) - 2P(k+1) + P(k) = \delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$, donc la suite $(p_n)$ est une suite qui satisfait la relation de récurrence de l'énoncé.**

**Soit $(u_n)$ une suite réelle, alors $(u_n)$ satisfait la relation de récurrence si et seulement si la suite $v_n = u_n - p_n$ vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k = 0$. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire d'ordre $2$ est : $0 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, donc $(u_n)$ convient si et seulement si il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,**
**$u_n = p_n + (A + Bn)1^n$.**

**De plus, pour $k \geqslant h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\dots(k-(h-1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_k(h) = 0$, donc $(u_n)$ est solution du problème si et seulement si**

$$\boxed{\text{il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_k = A + Bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}}$$

***avec convention : $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$***

### III.C - Polynômes à valeurs entières

**III.C.1) Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.**
**Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :**

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\dots(-(p+n-1)) = \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n}$$

**Finalement**

$$\boxed{H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si} \quad k \geqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k \in [\![0, n-1]\!] \\ (-1)^n\binom{n-1-k}{n} & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}}$$

**III.C.2) Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisqu'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.**

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}}$$

**III.C.3) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,**

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

**Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc**

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P)}$$

**III.C.4)** **Si $P$ est à valeurs entières sur les entiers,**
**alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;**
**et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de $P$ dans la base $(H_k)$ sont des entiers.**
**Réciproquement, si les coordonnées de $P$ dans la base $(H_k)$ sont des entiers,**
**alors $P = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i$, puis $P(k) = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).**
**Bilan :**

$$\boxed{\text{$P$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans $(H_k)$ sont entières}}$$

**III.C.5)** **Supposons que $P$, de degré $d$, est à valeurs entières sur les entiers,**

**Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i$.**

**Et donc**

$$d!P = \sum_{i=0}^{d} a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^{d} \left( a_i \times d(d-1)\dots(i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1}(X-j) \right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, $d!P$ est bien un polynôme à coefficients entiers.}}$$

**Comme le montre le polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré $2$ :**
**on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.**

$$\boxed{\text{La réciproque est donc fausse.}}$$

## IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

**IV.A -**

**IV.A.1)** $x \mapsto x+1$ **est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.**
**Par composition, $x \mapsto f(x+1)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis par addition**

$$\boxed{\text{$\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$}}$$

**Puis pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,**

$$\delta(f')(x) = f'(x+1) - f'(x) \text{ et } (\delta(f))'(x) = f'(x+1) - f'(x)$$

**Donc**

$$\boxed{\delta(f') = (\delta(f))'}$$

**IV.A.2)** **Même démonstration qu'en $I.B.4$),**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (\delta^n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)}$$

**IV.A.3)** **Soit $x > 0$.**
**Appliquons le théorème des accroissements finis à $f$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x+1]$,**

$$\exists c \in ]x, x+1[ \text{ telque } \delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = f'(c) \times (x+1-x) = f'(c)$$

**En faisant le changement de variable $y_1 = c - x$,**

$$\boxed{\text{pour tout $x > 0$, il existe $y_1 \in ]0,1[$ tel que $\delta(f)(x) = f(x+y_1)$}}$$

**IV.A.4) Nous allons procéder par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :**

$\mathcal{P}_n$ **:« $\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in ]0, n[$ tel que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$ »**

- **D'après la question $IV.A.3)$, $\mathcal{P}_1$ est vraie.**
- **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.**
  **Soit $x > 0$ et soit $f$ une application de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On peut appliquer $\mathcal{P}_n$ à $\delta(f)$, qui est bien de classe $C^\infty$, donc il existe $y_n \in ]0, n[$ tel que :**

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n)$$

  **Puis par commutation des opérateurs différence et dérivation :**

$$\delta^{n+1}(f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n) = \delta(f^{(n)})(x+y_n) = f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n)$$

  **On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$ : il existe $c \in ]x+y_n, x+y_n+1[$ tel que**

$$f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n) = (f^{(n)})'(c) \times \Big((x+y_n+1) - (x+y_n)\Big) = f^{(n+1)}(c)$$

  **Enfin, d'après $IV.A.2)$ :**

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x+j) = f^{(n+1)}(c)$$

  **En prenant $y_{n+1} = c - x$, alors $y_{n+1} > x + y_n - x \geqslant y_n \geqslant 0$ et $y_{n+1} < x + y_n + 1 - x \leqslant y_n + 1 \leqslant n+1$.**
  **Ainsi, on a donc $\mathcal{P}_{n+1}$ qui est vérifiée.**

**Par conséquent,**

$$\boxed{\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in ]0, n[ \text{ telque } \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)}$$

**IV.B -**

**IV.B.1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.**

**Il existe $p_1, \dots p_i$, $i$ nombres premiers et $a_1, a_2 \dots a_i \in \mathbb{N}$ tel que $k = \displaystyle\prod_{j=1}^{i} p_j^{a_j}$.**

**On a alors**

$$k^\alpha = \prod_{j=1}^{i} (p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^{i} (p_j^\alpha)^{a_j}$$

**Il s'agit de produit de nombres entiers naturels non nuls, donc**

$$\boxed{k^\alpha \textbf{ est un nombre entier naturel}}$$

**IV.B.2) Si $\alpha < 0$, alors**

$$2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$$

**Or on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ , $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$, donc $k^\alpha \geqslant 1$. On a une contradiction,**

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}_+}$$

**IV.B.3) Si $\alpha$ est un entier naturel, alors $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$ et donc $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$;**
**donc l'une au moins des dérivées de $f_\alpha$ s'annule en au moins un réel strictement positif.**

**Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$;**
**or on sait que pour tout réel $x$,**

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

**Donc si $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$, alors comme $x_0 > 0$, on a nécessairement : $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = 0$;**
**et donc il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\alpha - k = 0$ donc $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Ainsi :**

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{N} \text{ si et seulement si il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0}$$

## IV.C -

**IV.C.1) D'après $IV.B.1$), pour tout $k$ entier, $k^\alpha \in \mathbb{N}$,**
**donc pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$ puisque $x$ entier.**
**Puis par stabilité par multiplications et additions d'entiers :**

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{Z}}$$

**IV.C.2) On applique directement la relation ($IV.1.$) :**

$$\exists y_n \in ]0, n[ \text{ tel que } \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}}$$

**Donc comme $y_n \geqslant 0$,**

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \leqslant \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{x^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

**IV.C.3) Comme cette limite pour $x \to +\infty$ est nulle, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{2}$; il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$ : $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.**
**Or, lorsque $x \in \mathbb{N}^*$, cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.**
**Ainsi, pour tout $x \geqslant A$ avec $x \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = 0 = f^{(n)}(x+y_n)$.**
**Donc, une dérivée de $f_\alpha$ s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après $IV.B.3$),**

$$\boxed{\alpha \text{ est donc un entier naturel}}$$