Résumé de cours :
Semaine 30, du 18 au 22 mai.

Les déterminants

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

1 Définition du déterminant (suite et fin)

1.1 Déterminant d'un système de n vecteurs (suite et fin)

Au sein de ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, avec $n > 0$.

Propriété. $\det_e(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_j(x_{\sigma(j)})$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $\det_e$ est une forme n-linéaire alternée telle que $\det_e(e) = 1$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $A_n(E)$ est une droite vectorielle dirigée par $\det_e$.

1.2 Volume

Supposons temporairement que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on note H_x l'hyperparallélépipède $H_x = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ / \ t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]\}$.
Si vol est une application de E^n dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in E^n$, $|\mathrm{vol}(x)|$ représente le volume de H_x et le signe de $\mathrm{vol}(x)$ représente l'orientation du n-uplet x, alors en imposant des contraintes raisonnables aux notions de volume et d'orientation, l'application vol est nécessairement une forme n-linéaire alternée.

Propriété. $\det_e(x)$ est donc la seule définition raisonnable du volume algébrique de H_x, si l'on choisit l'unité de volume de sorte que le volume de H_e soit égal à 1.

1.3 Déterminant d'une matrice

Définition. Le déterminant de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant des vecteurs colonnes de M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Représentation tabulaire. Si $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\det(M) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$.

Propriété. $\boxed{\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} M_{j,\sigma(j)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} M_{\sigma(j),j} = \det({}^tM).}$
Ainsi $\det(M)$ est aussi le déterminant des vecteurs lignes de M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Formule de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3} + p_{2,1}p_{3,2}p_{1,3} + p_{3,1}p_{1,2}p_{2,3} \\ \\ -p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1} - p_{2,3}p_{3,2}p_{1,1} - p_{3,3}p_{1,2}p_{2,1}. \end{array}$$

1.4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit $u \in L(E)$. Le ***déterminant de l'endomorphisme*** u est l'unique scalaire, noté $\det(u)$, vérifiant $\forall f \in A_n(E) \quad \forall x \in E^n \quad f(u(x)) = (\det(u))f(x)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient e une base de E et $u \in L(E)$.
Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\boxed{\det_e(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u)\det_e(x_1, \ldots, x_n)}$.
En particulier, $\det(u) = \det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Propriété. Pour toute base e de E et pour tout $u \in L(E)$, $det(u) = det(Mat(u, e))$.

2 Propriétés du déterminant

Notation. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E.

Propriété. det_e est n-linéaire alternée, donc antisymétrique. $\det_e(e) = 1$.
$\det_e(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas modifié si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Propriété. Le déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est modifié en :
- $\det(M)$ pour une opération élémentaire du type $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$;
- $\alpha\det(M)$ pour une opération élémentaire du type $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \longleftarrow \alpha C_i$;
- $-\det M$ pour un échange entre deux lignes ou deux colonnes.

ATTENTION : En général, $\det(\alpha M + N) \neq \alpha\det(M) + \det(N)$.

Méthode : Pour calculer le déterminant d'une matrice, on tente de modifier la matrice par des manipulations élémentaires, afin de se ramener à une matrice dont on connait le rang ou le déterminant.

Propriété. $\det(Id_E) = 1$, $\det(I_n) = 1$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in L(E)$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Théorème. Si $f, g \in L(E)$, alors $\boxed{\det(fg) = \det(f) \times \det(g)}$.
Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule de changement de base : Soient e et e' deux bases de E, et soit x une famille de n vecteurs de E. Alors, $\boxed{\det_{e'}(x) = \det_{e'}(e)\det_e(x)}$.

Théorème. $\boxed{x \text{ est une base si et seulement si } \det_e(x) \neq 0.}$
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soit $u \in L(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$u \in GL(E)$ si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Remarque. det est donc un morphisme du groupe $GL(E)$ vers $(\mathbb{K}^*, \times)$.
Son noyau est un sous-groupe (distingué) de $GL(E)$, noté $SL(E)$.
C'est le groupe spécial linéaire de E : $SL(E) = \{u \in L(E) \ / \ \det(u) = 1\}$.
En particulier de $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \det(M) = 1\}$: c'est le groupe spécial linéaire de degré n.

Propriété. Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

3 Calcul des déterminants

Définition. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, notons ${}_{i,j}M$ la matrice extraite de M en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La quantité $\det({}_{i,j}M)$ s'appelle le $(i,j)^{\text{ème}}$ ***mineur*** de M
La quantité $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\det({}_{i,j}M)$ s'appelle le $(i,j)^{\text{ème}}$ ***cofacteur*** de M.

Théorème. Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$,
$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}$: c'est **le développement de det(M) selon sa $j^{\text{ème}}$ colonne.**

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}$: c'est le **développement de det(M) selon sa $i^{\text{ème}}$ ligne.**
Il faut savoir le démontrer.

Définition. On appelle ***comatrice*** de M la matrice $(C_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ des cofacteurs de M.
On la notera $Com(M)$ ou bien $Cof(M)$.
La transposée de la comatrice s'appelle la ***matrice complémentaire*** de M.

Théorème. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad M\,{}^tCof(M) = {}^tCof(M)M = \det(M)I_n$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Lorsque M est inversible, $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\,{}^tCof(M)$.

Théorème. Soit $M = (M_{i,j})_{\substack{1\le i\le a\\ 1\le j\le a}}$ une matrice décomposée en blocs, où, pour tout $i,j \in \mathbb{N}_a$, $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$. Si M est triangulaire supérieure (ou inférieure) par blocs, $\det(M) = \prod_{i=1}^{a} \det(M_{i,i})$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.

4 Formules de Cramer

Propriété. Considérons un système linéaire de Cramer (S) : $MX = B$, où $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$, dont l'unique solution est notée $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Alors, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\boxed{x_j = \dfrac{\det({}_jM)}{\det(M)}}$
où ${}_jM$ est la matrice dont les colonnes sont celles de M, sauf la $j^{\text{ème}}$ qui est égale à B.
Il faut savoir le démontrer.

5 Exemples de déterminants.

5.1 Déterminant de Vandermonde

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
La ***matrice de Vandermonde*** est $\mathcal{V}(a_0, \ldots, a_n) = (a_{i-1}^{j-1}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$,
et le ***déterminant de Vandermonde*** est $V(a_0, \ldots, a_n) = \det(\mathcal{V}(a_0, \ldots, a_n))$.

Propriété. $V(a_0, \ldots, a_n) = \displaystyle\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Il faut savoir le démontrer.

5.2 Déterminants tridiagonaux

Définition. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
M est tridiagonale si et seulement si , pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $|i-j| \geq 2 \Longrightarrow m_{i,j} = 0$.

Propriété. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice tridiagonale. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, notons M_k la matrice extraite de M en ne retenant que ses k premières colonnes et ses k premières lignes. Alors la suite $(\det(M_k))_{1 \leq k \leq n}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

5.3 Déterminants circulants

Définition. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est circulante si et seulement si on passe de l'une de ses lignes à la suivante selon une permutation circulaire des coefficients vers la droite.

Méthode : Pour des matrices circulantes simples, on peut commencer par remplacer la première ligne par la somme de toutes les lignes. La première ligne devient alors colinéaire à $(1, 1, \ldots, 1)$. On peut ensuite effectuer des différences de colonnes pour placer des 0 sur la première ligne.

6 Le polynôme caractéristique

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.

6.1 Définition

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique la quantité
$\chi_M = \det(XI_n - M)$. C'est le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont dans le corps $\mathbb{K}(X)$.
χ_M est un élément de $\mathbb{K}[X]$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$.

Propriété. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{{}^tM} = \chi_M$.

Propriété. Si M est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $\chi_M(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

Propriété. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. On déduit de la propriété précédente que la quantité $\chi_{mat(u,e)}$ ne dépend pas du choix de la base e de E. Cette quantité s'appelle le polynôme caractéristique de u.

Propriété. $(\lambda \in Sp(u)) \Longleftrightarrow (\lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \chi_u(\lambda) = 0)$.

Corollaire. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp({}^tM) = Sp(M)$.

Corollaire. Le spectre d'une matrice triangulaire supérieure est égal l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

Définition. Si λ est une valeur propre de u, on appelle multiplicité de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u. On la note $m(\lambda)$.

6.2 Propriétés du polynôme caractéristique

Propriété. $\chi_u(X) = X^n - Tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u admet au moins un vecteur propre.

Corollaire. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, $Tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} m(\lambda)\lambda$ et $\det(u) = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $\chi_{u|_F^F}$ divise χ_u.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. On suppose que u stabilise la famille $(E_1, \ldots, E_p)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on note u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i. Alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i}$.

Notation. Pour tout $\lambda \in E_\lambda$, on note $q(\lambda) = dim(E_\lambda)$.

Propriété. $\forall \lambda \in Sp(u) \;\; 1 \leq q(\lambda) \leq m(\lambda)$.
Il faut savoir le démontrer.

Cas particulier. Si λ est une valeur propre simple de u, $1 = q(\lambda) = m(\lambda)$.

6.3 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Théorème. u est dz si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda) = q(\lambda)$.

Cas particulier. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable.