

# DM 57 : un corrigé

Il s'agit du problème des Mines MP 2007, modifié, aménagé, remanié.

## Partie I : Préliminaires

1°)  $\diamond$   $\text{Id}_E(F) = F \subset F$ , donc  $\text{Id}_E \in L_F(E)$ .

Soit  $u, v \in L_F(E)$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Soit  $x \in F$ .  $(\alpha u + v)(x) = \alpha u(x) + v(x) \in F$ , car  $F$  est un sous-espace vectoriel, donc  $\alpha u + v \in L_F(E)$ .

$(uv)(x) = u(v(x)) \in u(F)$ , car  $v(x) \in F$ , donc  $(uv)(x) \in F$ . Ainsi,  $uv \in L_F(E)$ .

Ceci prouve que  $L_F(E)$  est une sous-algèbre de  $L(E)$ .

$\diamond$  Pour tout  $u \in L_F(E)$ ,  $u(F) \subset F$ , donc  $u|_F^F$  est bien défini et appartient à  $L(F)$ .

Soit  $u, v \in L_F(E)$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Soit  $x \in F$ .

$(\alpha u + v)|_F^F(x) = (\alpha u + v)(x) = \alpha u(x) + v(x) = \alpha \cdot u|_F^F(x) + v|_F^F(x) = (\alpha \cdot u|_F^F + v|_F^F)(x)$ , donc  $(\alpha u + v)|_F^F = \alpha \cdot u|_F^F + v|_F^F$ .

De même,  $(uv)|_F^F(x) = (uv)(x) = u(v(x)) = u(v|_F^F(x))$ , or  $v|_F^F(x) \in F$ ,

donc  $(uv)|_F^F(x) = u|_F^F(v|_F^F(x))$ , ce qui prouve que  $(uv)|_F^F = (u|_F^F)(v|_F^F)$ .

Enfin,  $(\text{Id}_E)|_F^F = \text{Id}_F$ , donc  $u \mapsto u|_F^F$  est un morphisme d'algèbres de  $L_F(E)$  dans  $L(F)$ .

2°) Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ . Soit  $x \in E_\lambda^u = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u)$ .

Alors  $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ , donc  $v(x) \in E_\lambda^u$ .

Ainsi, le sous-espace propre  $E_\lambda^u$  est stable par  $v$ .

3°)  $\diamond$   $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) \neq \{0\}$ , donc si et seulement si  $\lambda \text{Id}_E - u$  n'est pas injectif, c'est-à-dire bijectif, car il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie. Ainsi,  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\det(\lambda I_p - M) = 0$ .

$\diamond$  Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . D'après le cours,  $\det(\lambda I_p - M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^p (\lambda \delta_{j, \sigma(j)} - M_{j, \sigma(j)})$ .

Lorsque  $\sigma \in \mathcal{S}_p$  avec  $\sigma \neq \text{Id}_{\mathbb{N}_p}$ , il existe  $j \in \mathbb{N}_p$  tel que  $\delta_{j, \sigma(j)} = 0$ ,

donc  $\prod_{j=1}^p (X \delta_{j, \sigma(j)} - M_{j, \sigma(j)})$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $p$ .

Lorsque  $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{N}_p}$ ,  $\prod_{j=1}^n (X \delta_{j, \sigma(j)} - M_{j, \sigma(j)}) = \prod_{j=1}^n (X - M_{j,j})$  est de degré  $p$ ,

donc  $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$  est un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $p$ .

◇ D'après le théorème de d'Alembert, ce polynôme étant de degré  $p \geq 1$ , il possède au moins une racine  $\lambda \in \mathbb{C}$ , laquelle est donc une valeur propre de  $u$ , ce qu'il fallait démontrer.

4°) D'après la question précédente,  $u$  possède au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Posons  $F = E_\lambda^u$ . D'après la question 2,  $F$  est stable par  $v$ . On peut donc poser  $w = v|_F$ .  $w$  est un endomorphisme sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel non nul, donc d'après la question précédente, il possède une valeur propre  $\mu \in \mathbb{C}$ . Il existe donc  $x \in F$  tel que  $x \neq 0$  et  $w(x) = \mu x$ . Alors  $v(x) = w(x) = \mu x$ , de plus  $x \in F = E_\lambda^u$ , donc  $u(x) = \lambda x$ .

5°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $R(n)$  l'assertion suivante : pour tout  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et pour tout  $u \in L(E)$ ,  $u$  est trigonalisable.

Lorsque  $n = 1$ , si  $E$  est une droite vectorielle, tout endomorphisme sur  $E$  est une homothétie, donc est diagonalisable, donc est trigonalisable. Ainsi  $R(1)$  est vérifiée. Pour  $n \geq 1$ , supposons  $R(n)$ .

◇ Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$  et  $u \in L(E)$ .

D'après la question 3, il existe  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , et  $e_1 \in E \setminus \{0\}$  tel que  $u(e_1) = \lambda e_1$ . Soit  $G$  un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\mathbb{C}e_1$  dans  $E$ .

Choisissons sur  $G$  une base  $e' = (e_2, \dots, e_{n+1})$  et notons  $e = (e_1, \dots, e_{n+1})$ .

$e$  constitue une base de  $E$ , car elle est adaptée à la décomposition en somme directe suivante :  $E = \mathbb{C}e_1 \oplus G$ .

Notons  $M = \text{mat}(u, e)$ .  $M$  s'écrit par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & v \\ 0_{n,1} & M' \end{pmatrix}, \text{ où } M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), v = (v_1, \dots, v_n) \text{ est une matrice ligne et où } 0_{n,1}$$

désigne la matrice nulle à  $n$  lignes et à une colonne.

◇ Notons  $p$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $\mathbb{C}e_1$  et  $u'$  l'unique endomorphisme de  $G$  dont la matrice dans  $e'$  est  $M'$ .

Soit  $j \in \{2, \dots, n+1\}$ .  $u(e_j) = v_{j-1}e_1 + u'(e_j)$ , donc  $u'(e_j) = p(u(e_j))$ .

Ainsi  $u'$  est l'endomorphisme induit par  $p \circ u$  sur  $G$ .

◇  $\dim(G) = n$ , donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $u'$ .

Ainsi, il existe une base  $f' = (f_2, \dots, f_{n+1})$  de  $G$  telle que  $T' = \text{mat}(u', f')$  est triangulaire supérieure.

Posons  $f = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ .  $f$  constitue une nouvelle base de  $E$ .

Pour tout  $j \in \{2, \dots, n+1\}$ , il existe  $w_j \in \mathbb{K}$  tel que

$u(f_j) = w_{j-1}e_1 + p(u(f_j)) = w_{j-1}e_1 + u'(f_j)$ , donc, en posant

$$w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}), \text{ mat}(u, f) = \begin{pmatrix} \lambda & w \\ 0_{n,1} & T' \end{pmatrix}. \text{ Cette matrice est triangulaire}$$

supérieure, donc  $u$  est trigonalisable, ce qui prouve  $R(n+1)$ .

## Partie II : Algèbres de Lie

6°) Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{V}$ ,  $X$  est un vecteur propre de  $M$  : il existe donc un scalaire  $\lambda(M)$  tel que  $MX = \lambda(M)X$ , unique car  $X \neq 0$ .

Soit  $M_1, M_2 \in \mathcal{V}$  et  $\mu \in \mathbb{C}$ . Alors

$$(\mu M_1 + M_2)X = \mu M_1(X) + M_2(X) = \mu \lambda(M_1)X + \lambda(M_2)X = (\mu \lambda(M_1) + \lambda(M_2))X.$$

D'autre part,  $(\mu M_1 + M_2)X = \lambda(\mu M_1 + M_2)X$ , or  $X \neq 0$ ,

donc  $\mu \lambda(M_1) + \lambda(M_2) = \lambda(\mu M_1 + M_2)$ , ce qui prouve que l'application  $\lambda : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$  est bien une forme linéaire.

7°)  $M \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , donc  $M$  et  $A$  sont deux éléments de  $\mathcal{U}$ .

Alors  $[M, A] \in [\mathcal{U}] \subset \mathcal{V}$ , donc  $[M, A] \in \mathcal{V}$ .

8°) La question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'application  $\lambda_k$  est correctement définie de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Considérons l'hypothèse de récurrence  $(H_i) : \forall M \in \mathcal{V}, MX_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_j$ .

La propriété  $H_0$  est trivialement vérifiée :

$$\forall M \in \mathcal{V}, MX_0 = MX = \lambda(M)X = \lambda_0(M)X_0 = \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} \lambda_{-j}(M)X_j.$$

Soit  $i \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $H_i$  soit vérifiée.

Alors pour tout  $M \in \mathcal{V}$ ,  $MX_{i+1} = MAX_i = [M, A]X_i + AMX_i$ .

En appliquant  $(H_i)$  aux deux éléments  $M$  et  $[M, A]$  de  $\mathcal{V}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} MX_{i+1} &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}([M, A])X_j + A \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_j \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \lambda_{i-j+1}(M)X_j \\ &= \lambda_{i+1}(M)X_0 + \sum_{j=1}^i \left[ \binom{i}{j} + \binom{i}{j-1} \right] \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \lambda_0(M)X_{i+1}, \end{aligned}$$

donc d'après la formule de Pascal,  $MX_{i+1} = \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}(M)X_j$ , ce qui prouve

$(H_{i+1})$ . Nous avons donc démontré par récurrence que  $(H_i)$  est vérifiée pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , ce qui donne bien l'identité (1). De plus, lorsque  $M \in \mathcal{V}$ ,  $[M, A] \in \mathcal{V}$  donc l'identité (1) appliquée à  $[M, A]$  au lieu de  $M$  donne l'identité (2).

9°) L'ensemble des entiers  $i \geq 0$  pour lesquels la famille  $\{X_0, X_1, \dots, X_i\}$  est libre est non vide (il contient 0 car  $X_0$  est non nul) et majoré par  $n$  car  $\mathbb{C}^n$  est de dimension  $n$ . Il admet donc un plus grand élément  $q$ .

10°) D'après la relation (1), pour tout  $i \in \{0, \dots, q\}$ ,  $MX_i \in G$ , donc pour tout  $Y \in G = \text{Vect}(X_0, \dots, X_q)$ ,  $\overline{M}(Y) = MY \in G$ . On peut donc définir  $\overline{M}|_G^G \in L(G)$ .

De même, la relation (2) montre qu'on peut définir  $\overline{[M, A]}|_G^{\mathbb{C}}$ .

Par définition de  $q$ , la famille  $(X_0, \dots, X_{q+1})$  est liée, donc il existe  $\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1} \in \mathbb{C}$ ,

non tous nuls, tels que  $\sum_{i=0}^{q+1} \alpha_i X_i = 0$ .

Si  $\alpha_{q+1} = 0$ , la famille  $(X_0, \dots, X_q)$  étant libre, on en déduirait que  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i \in \{0, \dots, q+1\}$ , ce qui est faux.

Ainsi,  $\alpha_{q+1} \neq 0$  et  $AX_q = X_{q+1} = -\frac{1}{\alpha_{q+1}} \sum_{i=0}^q \alpha_i X_i \in G$ .

De plus, pour tout  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ ,  $AX_i = X_{i+1} \in G$ , donc  $\overline{A}|_G^{\mathbb{C}}$  est également défini.

**11°)** D'après la question 1,  $\overline{[M, A]}|_G^{\mathbb{C}} = \overline{M}|_G^{\mathbb{C}} \circ \overline{A}|_G^{\mathbb{C}} - \overline{A}|_G^{\mathbb{C}} \circ \overline{M}|_G^{\mathbb{C}}$ , donc la trace de  $\overline{[M, A]}|_G^{\mathbb{C}}$  est nulle, par linéarité de la trace et en utilisant la propriété classique

$\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$  lorsque  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel de dimension finie.

**12°)** Notons  $B = (b_{i,j})_{0 \leq i, j \leq q}$  cette matrice, en acceptant de faire varier les indices de lignes et de colonnes entre 0 et  $q$ . Ainsi, pour tout  $j \in \{0, \dots, q\}$ , les coefficients  $(b_{i,j})_{0 \leq i \leq q}$  sont les coordonnées de  $[M, A]X_j$  dans la base  $(X_0, \dots, X_q)$ . D'après les relations (2), cette matrice est triangulaire supérieure, de terme général  $b_{i,j} = 0$  lorsque

$i > j$  et  $b_{i,j} = \binom{j}{i} \lambda_{j-i+1}(M)$  lorsque  $0 \leq i \leq j \leq q$ .

**13°)** En particulier, les coefficients diagonaux de  $B$  sont tous égaux à

$\lambda_1(M) = \lambda([M, A])$ . D'après le cours,  $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(\overline{[M, A]}|_G^{\mathbb{C}}) = 0$ , donc  $0 = \text{Tr}(B) = (q+1)\lambda([M, A])$ , or  $q+1 \neq 0$ , donc  $\boxed{\lambda([M, A]) = 0}$ .

**14°)** Si  $X = 0$ , la propriété à établir est évidente. On peut donc supposer que  $X \neq 0$ . Alors  $X$  est un vecteur propre pour toutes les matrices de  $\mathcal{V}$ , donc on peut utiliser les questions précédentes. D'après la question 13,  $0 = [M, A]X = MAX - AMX$ , donc  $MAX = AMX$ , puis  $M(AX) = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)(AX)$ , ce qu'il fallait démontrer. Ainsi, lorsque  $AX \neq 0$ ,  $AX$  est un vecteur propre pour chaque matrice  $M$  de  $\mathcal{V}$ , associé à la même valeur propre que  $X$ .

### Partie III : Algèbres de Lie résolubles

**15°)** D'après le cours,  $\text{Vect}\{u(x_1), \dots, u(x_p)\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i u(x_i) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C} \right\}$ , or  $u$

est linéaire, donc  $\text{Vect}\{u(x_1), \dots, u(x_p)\} = \left\{ u\left( \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \right) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C} \right\} = u(F)$ ,

où  $F = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C} \right\} = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$ .

Ainsi,  $\text{Vect}\{u(x_1), \dots, u(x_p)\} = u(\text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\})$ .

**16°)**  $\diamond M \in \mathcal{N}_k$  si et seulement si les  $k$  premières colonnes de  $M$  sont nulles et si pour tout  $j \in \{1, \dots, n-k\}$ , la  $(k+j)$ -ème colonne de  $M$  est une combinaison linéaire de  $c_1, \dots, c_j$ , c'est-à-dire si et seulement si pour tout  $j \in \mathbb{N}_k$ ,  $Mc_j = 0$  et pour tout  $j \in \{k+1, \dots, n\}$ ,  $Mc_j \in \text{Vect}(c_1, \dots, c_{j-k}) = F_{j-k}$ .

Ainsi, en convenant que  $F_i = \{0\}$  lorsque  $i \in \mathbb{Z}$  avec  $i \leq 0$ , on a montré que

$$\boxed{M \in \mathcal{N}_k \text{ si et seulement si pour tout } j \in \mathbb{N}_n, Mc_j \in F_{j-k}}.$$

$\diamond$  Supposons d'abord que  $M \in \mathcal{N}_k$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}_i$ ,

$Mc_j \in F_{j-k} \subset F_{i-k}$ , or d'après la question précédente,

$$\overline{M}(F_i) = \overline{M}(\text{Vect}\{c_1, \dots, c_i\}) = \text{Vect}(\{Mc_1, \dots, Mc_i\}), \text{ donc } \overline{M}(F_i) \subset F_{i-k}.$$

Réciproquement, supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\overline{M}(F_i) \subset F_{i-k}$ . Alors pour tout  $j \in \mathbb{N}_n$ ,  $Mc_j \in \overline{M}(F_j) \subset F_{j-k}$ , donc d'après l'encadré précédent  $M \in \mathcal{N}_k$ .

$$\text{En conclusion, } \boxed{M \in \mathcal{N}_k \iff [\forall i \in \mathbb{N}_n, \overline{M}(F_i) \subset F_{i-k}]}.$$

**17°)**  $\diamond$  Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , notons  $\mathcal{M}_k = \{PMP^{-1} / M \in \mathcal{N}_k\} = P\mathcal{N}_kP^{-1}$ .

Les  $\mathcal{N}_k$  et les  $\mathcal{M}_k$  sont clairement stables par combinaison linéaire et sont non vides (ils contiennent la matrice nulle), donc ce sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Il est également clair que  $\{0\} = \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ ,

donc que  $\{0\} = \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_0 = \mathcal{T}$ .

Il reste donc à montrer que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $[\mathcal{M}_k] \subset \mathcal{M}_{k+1}$

$\diamond$  Soit  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Soit  $M, M' \in \mathcal{M}_k$ . Posons  $N = P^{-1}MP$  et  $N' = P^{-1}M'P$ .

Ainsi,  $N, N' \in \mathcal{N}_k$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}_n$ . D'après la question précédente,  $\overline{N}(F_i) \subset F_{i-k}$ ,

or  $k \geq 1$  donc  $\overline{N}(F_i) \subset F_{i-1}$ . Alors  $\overline{N'N}(F_i) = \overline{N'}(\overline{N}(F_i)) \subset \overline{N'}(F_{i-1})$ ,

donc  $\overline{N'N}(F_i) \subset F_{i-1-k} = F_{i-(k+1)}$ . D'après la question précédente, on a prouvé que  $N'N \in \mathcal{N}_{k+1}$ . On en déduit que  $M'M = P(N'N)P^{-1} \in \mathcal{M}_{k+1}$ . De même on montre que  $MM' \in \mathcal{M}_{k+1}$ , or  $\mathcal{M}_{k+1}$  est un sous-espace vectoriel, donc

$$[M, M'] = MM' - M'M \in \mathcal{M}_{k+1}.$$

On a ainsi montré que  $\{[M, M'] / M, M' \in \mathcal{M}_k\} \subset \mathcal{M}_{k+1}$ ,

donc  $[\mathcal{M}_k] = \text{Vect}(\{[M, M'] / M, M' \in \mathcal{M}_k\}) \subset \mathcal{M}_{k+1}$ .

$\diamond$  Il reste à démontrer cette propriété lorsque  $k = 0$ . Soit  $M, M' \in \mathcal{M}_0 = \mathcal{T}$ . Posons  $N = P^{-1}MP$  et  $N' = P^{-1}M'P$ . Ainsi,  $N$  et  $N'$  sont triangulaires supérieures. D'après le cours, pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ , le  $i$ -ème coefficient diagonal de  $NN'$  vaut  $[NN']_{i,i} = N_{i,i}N'_{i,i}$  et de même,  $[N'N]_{i,i} = N'_{i,i}N_{i,i}$ , donc  $[NN' - N'N]_{i,i} = 0$ , ce qui prouve que

$$[N, N'] \in \mathcal{N}_1, \text{ puis que } [M, M'] = P[N, N']P^{-1} \in \mathcal{M}_1.$$

On en déduit alors que  $[\mathcal{M}_0] \subset \mathcal{M}_1$ .

En conclusion, on a montré que  $\mathcal{T}$  est une algèbre de Lie résoluble de longueur  $n$ .

$\diamond$  Ceci permet de montrer la partie "réciproque" du théorème. En effet, soit  $\mathcal{U}$  une algèbre de Lie dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que, pour tout  $M \in \mathcal{U}$ ,  $P^{-1}MP$  est triangulaire supérieure. Pour cette matrice  $P$ , on reprend les notations précédentes, et on pose  $\mathcal{U}_k = \mathcal{U} \cap \mathcal{M}_k$ , pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ . On a clairement  $\{0\} = \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n-1} \subset \dots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$  (car par hypothèse,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_0$ ). Soit  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Soit  $A, B \in \mathcal{U}_i$ . Alors  $[A, B] \in [\mathcal{M}_i] \subset \mathcal{M}_{i+1}$  et  $[A, B] \in \mathcal{U}$ , car  $\mathcal{U}$  est une algèbre de Lie, donc  $[A, B] \in \mathcal{U}_{i+1}$ . Ainsi,  $[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1}$ . Ceci prouve que  $\mathcal{U}$  est

une algèbre de Lie résoluble de longueur  $n$ .

**18°)** Nous avons  $[\mathcal{U}] = [\mathcal{U}_0] \subset \mathcal{U}_1 = \{0\}$ , donc  $[M, M'] = 0$  pour tous  $M, M' \in \mathcal{U}$  : les éléments de  $\mathcal{U}$  commutent deux à deux.

**19°)** Prouvons le résultat suivant par récurrence sur  $r$  :  $r$  endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui commutent deux à deux possèdent un vecteur propre commun.

◇ Lorsque  $r = 1$ , la propriété est vraie car d'après la question 3, tout endomorphisme, sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension non nulle, possède au moins une valeur propre, donc au moins un vecteur propre.

◇ Soit maintenant  $r \geq 1$ . Supposons la propriété vérifiée au rang  $r$  et considérons une famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq r+1}$  d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension non nulle qui commutent deux à deux.

D'après la question 3,  $f_{r+1}$  possède au moins une valeur propre  $\lambda$  :

notons  $F = \text{Ker}(f_{r+1} - \lambda \text{Id}_E)$  l'espace propre associé. D'après la question 2,  $F$  est stable par les  $f_i$ , pour  $i$  variant de 1 à  $r$ .

D'après la question 1, pour tout  $i, j \in \mathbb{N}_r$ ,  $(f_i|_F)(f_j|_F) = (f_i f_j)|_F$ , donc

$(f_i|_F)(f_j|_F) = (f_j f_i)|_F = (f_j|_F)(f_i|_F)$ . De plus,  $\dim(F) \geq 1$ , donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille  $(f_i|_F)_{1 \leq i \leq r}$  : il existe un vecteur  $x \in F$  qui est propre pour tous les  $f_i|_F$ . Ce vecteur est donc un vecteur propre pour tous les  $f_i$ , lorsque  $i \in \mathbb{N}_r$ , mais aussi pour  $f_{r+1}$  car  $x \in \text{Ker}(f_{r+1} - \lambda \text{Id}_E)$ .

Le résultat demandé est alors une conséquence directe, car  $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_r$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$  qui commutent deux à deux.

**20°)**  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie, donc  $\mathcal{U}$  est aussi de dimension finie. Ainsi, il existe une base de  $\mathcal{U}$ , notée  $(M_1, M_2, \dots, M_r)$ .

D'après le résultat précédent, il existe un vecteur propre  $X$  commun aux endomorphismes  $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_r$ . Ainsi, pour tout  $i \in \mathbb{N}_r$ , il existe  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  tel que  $\overline{M}_i X = \lambda_i X$ . Soit  $M \in \mathcal{U}$ . Il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$  tels que  $M = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_r M_r$ .

Alors  $\overline{M}(X) = \alpha_1 \lambda_1 X + \dots + \alpha_r \lambda_r X = \lambda X$ , en posant  $\lambda = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i$ . De plus,  $X$  est non nul, donc  $X$  est propre pour tous les endomorphismes associés aux éléments de  $\mathcal{U}$ .

**21°)** Avec les notations de la question précédente, il suffit de montrer qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que, pour tout  $i \in \mathbb{N}_r$ ,  $P^{-1} M_i P$  est triangulaire supérieure.

En effet, lorsque  $M = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i$  est une matrice quelconque de  $\mathcal{U}$ ,

$P^{-1} M P = \sum_{i=1}^r \alpha_i (P^{-1} M_i P)$  sera également triangulaire supérieure. Ainsi, il suffit

d'établir la propriété  $R(n)$  suivante, que l'on démontrera par récurrence sur  $n$  :

Lorsque  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel dimension  $n$ , pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

pour tout  $u_1, \dots, u_r \in L(E)$  qui commutent deux à deux, il existe une base  $e$  de  $E$  telle que, pour tout  $i \in \mathbb{N}_r$ ,  $\text{mat}(u_i, e)$  est triangulaire supérieure.

La démonstration qui suit est une adaptation de celle produite en question 5.

Lorsque  $n = 1$ ,  $R(1)$  est claire car si  $E$  est une droite vectorielle, en notant  $e$  une base de  $E$ , la matrice de tout endomorphisme de  $E$  dans la base  $e$  est de taille 1, donc est triangulaire supérieure.

Pour  $n \geq 1$ , supposons  $R(n)$ .

◇ Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$ , soit  $r \in \mathbb{N}^*$  et soit  $u_1, \dots, u_r \in L(E)$   $r$  endomorphismes qui commutent deux à deux.

D'après la question 19, il existe  $e_1 \in E \setminus \{0\}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  tels que, pour tout  $i \in \mathbb{N}_r$ ,  $u_i(e_1) = \lambda_i e_1$ .

Soit  $G$  un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\mathbb{C}e_1$  dans  $E$ .

Choisissons sur  $G$  une base  $e' = (e_2, \dots, e_{n+1})$  et notons  $e = (e_1, \dots, e_{n+1})$ .  $e$  constitue une base de  $E$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}_r$ . Notons  $M_i = \text{mat}(u_i, e)$ .  $M_i$  s'écrit par blocs sous la forme suivante :

$M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_i \\ 0_{n,1} & M'_i \end{pmatrix}$ , où  $M'_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $v_i$  est une matrice ligne et où  $0_{n,1}$  désigne la matrice nulle à  $n$  lignes et à une colonne.

◇ Notons  $p$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $\mathbb{C}e_1$  et  $u'_i$  l'unique endomorphisme de  $G$  dont la matrice dans  $e'$  est  $M'_i$ .

On a vu en question 5 que  $u'_i$  est l'endomorphisme induit par  $p \circ u_i$  sur  $G$ .

◇ Soit  $i, j \in \mathbb{N}_r$ .  $u_i$  et  $u_j$  commutent, donc  $M_i$  et  $M_j$  commutent, or elles sont triangulaires supérieures par blocs, donc on sait que  $M_i M_j$  est de la forme

$M_i M_j = \begin{pmatrix} \lambda_i \lambda_j & w \\ 0_{n,1} & M'_i M'_j \end{pmatrix}$  et que de même  $M_j M_i$  est de la forme  $M_j M_i = \begin{pmatrix} \lambda_j \lambda_i & w' \\ 0_{n,1} & M'_j M'_i \end{pmatrix}$ .

On en déduit que  $M'_i$  et  $M'_j$  commutent, donc  $u'_i$  et  $u'_j$  commutent.

◇  $\dim(G) = n$ , donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $u'_1, \dots, u'_r$ .

Ainsi, il existe une base  $f' = (f_2, \dots, f_{n+1})$  de  $G$  telle que les matrices  $T'_i = \text{mat}(u'_i, f')$  sont triangulaires supérieures.

Posons  $f = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ .  $f$  constitue une nouvelle base de  $E$ .

Comme en question 5, pour tout  $i \in \mathbb{N}_r$ , la matrice de  $u_i$  dans la base  $f$  est de la forme  $\text{mat}(u_i, f) = \begin{pmatrix} \lambda_i & w_i \\ 0_{n,1} & T'_i \end{pmatrix}$ . Cette matrice est triangulaire supérieure. Ceci prouve  $R(n + 1)$ .

◇ On a ainsi établi le sens direct du théorème, lorsque  $p = 1$ .

**22°)**  $\mathcal{U}_1$  est une algèbre de Lie résoluble de longueur  $p - 1$ , donc d'après les hypothèses de l'énoncé, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $M \in \mathcal{U}_1$ ,  $P^{-1}MP$  est triangulaire supérieure.

Il existe une unique base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  telle que  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  vers  $e$ . Alors on sait que, pour tout  $M \in \mathcal{U}_1$ ,  $P^{-1}MP = \text{mat}(\overline{M}, e)$ , or cette matrice est triangulaire supérieure, donc la forme de sa première colonne impose que  $e_1$  est un vecteur propre pour  $\overline{M}$ , ce qu'il fallait démontrer.

**23°)** ◇ Notons  $\mathcal{G} = \{(A_1 \cdots A_k)X \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}_k, A_i \in \mathcal{U}\}$ . Ainsi,  $E = \text{Vect}(G)$ . En particulier, c'est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Si  $A \in \mathcal{U}$ , il est clair que pour tout  $Y \in \mathcal{G}$ ,  $AY \in \mathcal{G}$ , puis par combinaisons linéaires, que pour tout  $Z \in E$ ,  $AZ \in E$ . Ainsi,  $E$  est stable par tout  $A \in \mathcal{U}$ .

◇ Posons  $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1$ . Alors  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont des algèbres de Lie telles que  $[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , donc on peut utiliser le résultat de la question 14. Or, pour tout  $M \in \mathcal{V}$ , il existe  $\lambda(M) \in \mathbb{C}$  tel que  $MX = \lambda(M)X$ , donc pour tout  $A \in \mathcal{U}$ ,  $M(AX) = \lambda(M)(AX)$ . En appliquant à nouveau la question 14 au vecteur  $AX$ , pour  $A$  fixé dans  $\mathcal{U}$ , on obtient que, pour tout  $B \in \mathcal{U}$ ,  $M(BAX) = \lambda(M)(BAX)$ . Par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ , on en déduit que, pour tout  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{U}$ , pour tout  $M \in \mathcal{V}$ ,  $M((A_1 \cdots A_k)X) = \lambda(M)((A_1 \cdots A_k)X)$ . Ainsi, pour tout  $Y \in \mathcal{G}$ , pour tout  $M \in \mathcal{V}$ ,  $MY = \lambda(M)Y$ .

Soit  $M \in \mathcal{V}$ . l'égalité précédente signifie que  $\mathcal{G} \subset \text{Ker}(\lambda(M)I_n - M)$ ,

donc  $E = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Ker}(\lambda(M)I_n - M)$ .

Ainsi,  $\boxed{\text{pour tout } M \in \mathcal{V}, \text{ pour tout } Z \in E, MZ = \lambda(M)Z}$ .

Ceci prouve que tout élément non nul de  $E$  est un vecteur propre pour tous les éléments de  $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1$ .

**24°)** ◇ Comme en question 11,  $E$  étant stable pour  $M$  et  $M'$ , on peut définir  $\overline{[M, M']}|_E^E$  et c'est un endomorphisme de  $E$  de trace nulle.

◇ D'après l'encadré de la question précédente, pour tout  $R \in \mathcal{U}_1$ ,  $R|_E^E$  est une homothétie, de rapport  $\lambda(R)$ .

Or  $[M, M'] \in [\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}_1$ , donc  $\overline{[M, M']}|_E^E$  est bien une homothétie.

**25°)** ◇  $X$  est non nul et  $X \in E$ , donc  $\dim(E) \geq 1$ . Ainsi, toute homothétie sur  $E$  de trace nulle est identiquement nulle. La question précédente montre donc que, pour tout  $M, M' \in \mathcal{U}$ ,  $\overline{[M, M']}|_E^E = 0$ , donc  $M|_E^E$  et  $M'|_E^E$  commutent. En passant par une base de  $\{\overline{M}|_E^E / M \in \mathcal{U}\}$  et en utilisant la question 19, on montre que les éléments de cet ensemble possèdent un vecteur propre commun. Ainsi, il existe  $e_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  pour lequel, pour tout  $M \in \mathcal{U}$ , il existe  $\lambda(M) \in \mathbb{C}$  tel que  $Me_1 = \lambda(M)e_1$ .

◇ On va encore adapter la démonstration vue en questions 5 et 21 en raisonnant par récurrence sur  $n$ . On note donc  $R(n)$  la propriété selon laquelle le sens direct du théorème est vrai dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Lorsque  $n = 1$ , toutes les matrices de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  sont triangulaires supérieures, donc elles sont simultanément trigonalisables, donc s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{U}$  est une algèbre de Lie résoluble de longueur  $p$ , les matrices de  $\mathcal{U}$  sont simultanément trigonalisables.  $R(1)$  est donc vraie.

On suppose que  $n \geq 2$  et que  $R(n-1)$  est vraie.

On démontre alors  $R(n)$  par récurrence sur  $p$ .

Lorsque  $p = 1$ , c'est démontré grâce à la question 21.

On suppose donc  $p > 1$  et on suppose la propriété vraie sur  $\mathbb{C}^n$  pour les algèbres de Lie résolubles de longueurs  $p-1$ . On considère une algèbre de Lie résoluble de longueur  $p$ , notée  $\mathcal{U}$ . On peut alors utiliser les questions 22 à 24, ce qui donne le vecteur  $e_1$  du point précédent.

◇ Soit  $G$  un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\mathbb{C}e_1$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Notons  $p$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $\mathbb{C}e_1$ .

Choisissons sur  $G$  une base  $e' = (e_2, \dots, e_n)$  et notons  $e = (e_1, \dots, e_n)$ .

Pour tout  $M \in \mathcal{U}$ , on a vu en questions 5 et 21 qu'il existe  $v_M \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$  tel que

$$\text{mat}(\overline{M}, e) = \begin{pmatrix} \lambda(M) & v_M \\ 0_{n,1} & \text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') \end{pmatrix}.$$

Lorsque  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , notons  $u(R) = \text{mat}((p \circ \overline{R})|_G^G, e')$ . D'après la question 1,  $u$  est une application linéaire.

Pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ , posons  $\mathcal{U}'_i = u(\mathcal{U}_i) = \{\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') / M \in \mathcal{U}_i\}$ .  $u$  étant linéaire, les  $\mathcal{U}'_i$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De plus, on a clairement  $\{0\} = \mathcal{U}'_p \subset \mathcal{U}'_{p-1} \subset \dots \subset \mathcal{U}'_1 \subset \mathcal{U}'_0$ .

◇ Soit  $A, B \in \mathcal{U}'_i$ . Il existe  $M_A, M_B \in \mathcal{U}_i$  tels que  $A = u(M_A)$  et  $B = u(M_B)$ . Ainsi,  $[A, B] = \text{mat}(w, e')$ , où  $w = (p \circ \overline{M_A})|_G^G \circ (p \circ \overline{M_B})|_G^G - (p \circ \overline{M_B})|_G^G \circ (p \circ \overline{M_A})|_G^G$ .

Soit  $x \in G$ . il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\overline{M_B}(x) = \alpha e_1 + p(\overline{M_B}(x))$ , or  $\overline{M_A} \in \mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$ , donc  $(\overline{M_A M_B})(x) = \alpha \lambda(M_A) e_1 + (\overline{M_A p M_B})(x)$ , puis  $(p \overline{M_A M_B})(x) = (p \overline{M_A p M_B})(x)$ .

Ceci démontre que  $(p \overline{M_A M_B})|_G^G = (p \overline{M_A p M_B})|_G^G$ .

On en déduit, à l'aide de la question 1, que  $w = (p(\overline{M_A M_B} - \overline{M_B M_A}))|_G^G$ , donc

$w = (p[\overline{M_A}, \overline{M_B}])|_G^G$ , puis  $[A, B] = u([M_A, M_B]) \in \mathcal{U}'_{i+1}$ , car  $[M_A, M_B] \in [\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1}$ .

Ceci démontre que  $[\mathcal{U}'_i] \subset \mathcal{U}'_{i+1}$ .

◇ Ainsi,  $\mathcal{U}'_0$  est une algèbre de Lie résoluble de  $\mathbb{C}^{n-1}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe  $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $M \in \mathcal{U}'_0$ ,  $Q^{-1}MQ$  est triangulaire supérieure. D'après le cours, il existe une unique base  $f' = (f_2, \dots, f_n)$  de  $G$  telle que  $Q$  est la matrice de passage de  $e'$  vers  $f'$ . Posons  $f = (e_1, f_2, \dots, f_n)$ , c'est une base de  $\mathbb{C}^n$ .

Soit  $M \in \mathcal{U}$ . Par construction,  $\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') \in \mathcal{U}'_0$ , or par formule de changement de bases,  $\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, f') = Q^{-1} \text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, e') Q$ , donc  $\text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, f')$  est triangulaire supérieure. Or  $\text{mat}(\overline{M}, f)$  est de la forme

$$\text{mat}(\overline{M}, f) = \begin{pmatrix} \lambda(M) & w_M \\ 0_{n,1} & \text{mat}((p \circ \overline{M})|_G^G, f') \end{pmatrix},$$

donc elle est triangulaire supérieure. Ainsi, en notant  $P$  la matrice de passage de  $e$  vers  $f$ , on a montré que, pour tout  $M \in \mathcal{U}$ ,  $P^{-1}MP$  est triangulaire supérieure. Ceci prouve  $R(n)$ , ce qui conclut.