Feuille d'exercices 23.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 23.13 :

1°) Soit $g \in L(F, E)$.

$$\begin{aligned} g \in V &\Longleftrightarrow [\forall x \in E \;\; f \circ g[f(x)] = 0] \\ &\Longleftrightarrow [\forall y \in Im(f) \;\; f \circ g(y) = 0] \\ &\Longleftrightarrow [\forall y \in Im(f) \;\; g(y) \in Ker(f)] \\ &\Longleftrightarrow g(Im(f)) \subset Ker(f). \end{aligned}$$

2°) Soient $(b_1, \ldots, b_r)$ une base de $Im(f)$ que l'on complète en une base $b = (b_1, \ldots, b_p)$ de F et $a = (a_1, \ldots, a_{n-r})$ une base de $Ker(f)$, que l'on complète en une base $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de E.
D'après la première question, $g \in V$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{M}_{n-r,r}$, $B \in \mathcal{M}_{n-r,p-r}$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p-r}$ telles que la matrice de g dans les bases b et a se décompose en blocs sous la forme suivante : $Mat(g, b, a) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,r} & C \end{pmatrix}$.
On notera W l'ensemble de ces matrices.
Notons $\begin{array}{rccc} \varphi : & L(F,E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p} \\ & u & \longmapsto & Mat(u,b,a) \end{array}$. D'après le cours, φ est un isomorphisme, donc $dim(V) = dim(\varphi(V)) = dim(W)$, or

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n-r,r} \times \mathcal{M}_{n-r,p-r} \times \mathcal{M}_{r,p-r} & \longrightarrow & W \\ (A, B, C) & \longmapsto & \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,r} & C \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme, donc
$dim(V) = dim(\mathcal{M}_{n-r,r} \times \mathcal{M}_{n-r,p-r} \times \mathcal{M}_{r,p-r}) = r(n-r) + (n-r)(p-r) + r(p-r)$.
On en déduit que $dim(V) = np - r^2$.

Exercice 23.18 :

◇ $A^2 = 0$, donc $Im(A) \subset Ker(A)$. On en déduit que $rg(A) \leq dim(Ker(A))$, or, d'après la formule du rang, $dim(Ker(A)) = 3 - rg(A)$, donc $2rg(A) \leq 3$. Mais $rg(A) \in \mathbb{N}$, donc $rg(A) \in \{0, 1\}$. De plus, $rg(A) \neq 0$ car $A \neq 0$. Ainsi, $rg(A) = 1$ et $dim(Ker(A)) = 2$.
◇ Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
[Pour obtenir la première colonne de J, il faut choisir $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(e_1) = e_2$. Il suffit pour cela de prendre e_2 dans $Im(u)$, ce qui est possible car $Im(u) \subset Ker(u)$.]
Notons e_2 un vecteur directeur de la droite vectorielle $Im(u)$ et complétons (e_2) en une base (e_2, e_3) de $Ker(u)$.
$e_2 \in Im(u)$, donc il existe $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(e_1) = e_2$.

$e_1 \notin Ker(u)$ car $u(e_1) = e_2 \neq 0$, donc $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi $mat(u, e) = J$, ce qui prouve que A et J sont semblables.
• Il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.
Notons $E^A = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/AX + XA = 0\}$ et $E^J = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/JX + XJ = 0\}$.
◇ E^A est le noyau de l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX + XA \end{array}$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, on peut s'intéresser à sa dimension. Il en est de même pour E^J.
◇ Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$X \in E^A \iff PJP^{-1}X + XPJP^{-1} = 0 \iff JP^{-1}XP + P^{-1}XPJ = 0$,
donc (1) : $X \in E^A \iff P^{-1}XP \in E^J$.
Notons $\varphi : \begin{array}{ccc} E^A & \longrightarrow & E^J \\ X & \longmapsto & P^{-1}XP \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} E^J & \longrightarrow & E^A \\ Y & \longmapsto & PYP^{-1} \end{array}$.
φ est correctement définie car, d'après (1), $X \in E^A \Longrightarrow P^{-1}XP \in E^J$, et ψ est définie, car, toujours d'après (1), $PYP^{-1} \in E^A \Longleftarrow Y \in E^J$.
De plus, on vérifie que φ et ψ sont linéaires, que $\varphi \circ \psi = Id_{E^J}$ et que $\psi \circ \varphi = Id_{E^A}$.
On en déduit que E^A et E^J sont isomorphes, donc que $dim(E^A) = dim(E^J)$.
[On a bien ainsi ramené le problème portant initialement sur la matrice A en le même problème, mais portant maintenant sur la matrice réduite J.]
◇ Soit $X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En interprétant le produit XJ comme une matrice dont les colonnes sont des combinaisons linéaires des colonnes de X, on obtient que
$XJ = \begin{pmatrix} x_{1,2} & 0 & 0 \\ x_{2,2} & 0 & 0 \\ x_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et en interprétant le produit JX comme une matrice dont les lignes sont des combinaisons linéaires des lignes de X, on obtient que
$JX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $X \in E^J \iff x_{1,2} = x_{3,2} = x_{1,3} = x_{2,2} + x_{1,1} = 0$.
On en déduit que $E^J = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} /(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5\}$.
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & E^J \\ (a, b, c, d, e) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme, donc $dim(E^J) = 5$.
En conclusion, on a montré que $\boxed{dim(E^A) = 5}$.

Exercice 23.19 :

1°) Lorsque $B \in G$, l'application $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ A & \longmapsto & BA \end{array}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ A & \longmapsto & B^{-1}A \end{array}$, donc par changement de variable, $Bp = \frac{1}{m} \sum_{A \in G} BA = \frac{1}{m} \sum_{A \in G} A = p$.

On en déduit que $p^2 = \Big[\frac{1}{m}\sum_{B\in G} B\Big]p = \frac{1}{m}\sum_{B\in G} p = p$, donc p est bien un projecteur.

2°) D'après le cours, $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$, or l'opérateur Tr est linéaire,
donc $\text{rg}(p) = \frac{1}{m}\sum_{A\in G}\text{Tr}(A)$.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\text{Im}(p) = \bigcap_{A\in G} Ker(A - I_n)$:

Si $X \in \bigcap_{A\in G} Ker(A - I_n)$, pour tout $A \in G$, $AX = X$,
donc $pX = \frac{1}{m}\sum_{A\in G} AX = X$ et $X \in \text{Im}(p)$.

Réciproquement, supposons que $X \in \text{Im}(p)$ et soit $A \in G$.
Alors $p(X) = X$ (car p est un projecteur), donc $AX = ApX = pX = X$ car on vu en première question que $Bp = p$ pour tout $B \in G$. Ainsi, $X \in \bigcap_{A\in G} Ker(A - I_n)$.

Exercice 23.20 :

1°) L'énoncé suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|A^p\| \leq M$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\|B_p\| = \frac{1}{p}\|\sum_{k=0}^{p-1} A^k\| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\|A^k\| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} M = M$. Ainsi, la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B$.

2°) $B_{\varphi(p)}(I - A) = \frac{1}{\varphi(p)}\Big(\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} A^k\Big)(I - A) = \frac{1}{\varphi(p)}(I - A^{\varphi(p)})$,
donc $\|B_{\varphi(p)}(I - A)\| \leq \frac{1}{\varphi(p)}(\|I\| + \|A^{\varphi(p)}\|) \leq \frac{1}{\varphi(p)}(\|I\| + M) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $B_{\varphi(p)}(I - A) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, $B_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B$ et l'application $M \longmapsto M(I-A)$ est continue (par exemple parce qu'elle est linéaire en dimension finie), donc $B_{\varphi(p)}(I-A) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B(I-A)$. D'après l'unicité de la limite, $B(I - A) = 0$.

3°) On en déduit que $B = BA$, puis par récurrence sur k, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B = BA^k$.
Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $BB_{\varphi(p)} = \frac{1}{\varphi(p)}B\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} A^k = \frac{1}{\varphi(p)}\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1} BA^k = B$. Mais $BB_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} BB$, donc $B^2 = B$, ce qui montre que B est un projecteur.

4°)

$\diamond$ $B(I-A)=0$ donc $\mathrm{Im}(I-A)\subset \mathrm{Ker}(B)$.
En adaptant la question 2, on montre également que $(I-A)B=0$, donc $\mathrm{Im}(B)\subset \mathrm{Ker}(I-A)$.
$\diamond$ Soit $X\in Ker(I-A)$. Ainsi $AX=X$, donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^kX=X$, puis, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $B_{\varphi(p)}X=\dfrac{1}{\varphi(p)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(p)-1}A^kX=X$, or l'application $\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^n\\ M & \longmapsto & MX\end{array}$ est continue car linéaire, donc $B_{\varphi(p)}X\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}BX$. Ceci prouve que $BX=X$, donc que $X\in Im(B)$. Ainsi, $Ker(I-A)\subset Im(B)$.
$\diamond$ Ainsi, $\mathrm{Ker}(I-A)=Im(B)$. Alors d'après la formule du rang,
$\dim(\mathrm{Ker}(B))=n-\mathrm{rg}(B)=n-\dim(\mathrm{Ker}(I-A))=\mathrm{rg}(I-A)$, or $\mathrm{Im}(I-A)\subset\mathrm{Ker}(B)$, donc $\mathrm{Im}(I-A)=\mathrm{Ker}(B)$.

5°) On a montré que la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence, notée B. D'après le cours, on en déduit que $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers B : démontrons tout de même ce dernier point :
Supposons que la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers B. Ainsi, il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $P\in\mathbb{N}^*$, il existe $p\geq P$ tel que $\|B_p-B\|\geq\varepsilon$.
$\{p\in\mathbb{N}^*/\|B_p-B\|\geq\varepsilon\}$ n'est donc pas majoré. C'est une partie infinie de $\mathbb{N}$. On sait alors qu'il existe une unique bijection ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.
En particulier, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\|B_{\psi(p)}-B\|\geq\varepsilon$.
Cependant la suite $(B_{\psi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc elle admet une valeur d'adhérence notée C. Il existe $\psi'\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $B_{\psi(\psi'(p))}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}C$.
Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\|B_{\psi(\psi'(p))}-B\|\geq\varepsilon$, donc $\|C-B\|\geq\varepsilon$, mais $(B_{\psi(\psi'(p))})$ est aussi une suite extraite de la suite (B_p), donc C est aussi une valeur d'adhérence de la suite (B_p), donc elle est égale à B. C'est impossible, ce qui prouve que $B_p\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}B$.

Exercice 23.21 :

1°) D'après le cours, pour un corps de caractéristique nulle, lorsque $\deg(P)\geq 1$, $\deg(D(P))=\deg(P)-1$ et lorsque $\deg(P)\leq 0$, $\deg(D(P))=-\infty$.

2°) D'après la question précédente, les $\mathbb{K}_n[X]$ sont stables par D. De plus ils sont non nuls et de dimensions finies. Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, non nul et de dimension finie.
F admet au moins une base, notée $(P_i)_{0\leq i\leq k}$. Posons $n=\max\limits_{0\leq i\leq k}\deg(P_i)$.
Alors $F\subset\mathbb{K}_n[X]$.
Notons P l'un des polynômes de la famille $(P_i)_{0\leq i\leq k}$ qui est de degré n.
F étant stable par D, F contient la famille $b=(D^i(P))_{0\leq i\leq n}$, donc $\mathrm{Vect}(b)\subset F$, or b est une famille de polynômes de degrés étagés, donc on sait qu'elle constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\mathbb{K}_n[X]\subset F$.
On a donc montré que $F=\mathbb{K}_n[X]$.

3°) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et de dimension infinie. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. F n'est pas inclus dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, donc il existe $P\in F$ tel que $\deg(P)\geq n$.

Posons $k = \deg(P)$. Alors la famille $b = (D^i(P))_{0\leq i\leq k}$ est une base de $\mathbb{K}_k[X]$, donc pour les mêmes raisons qu'en question 2, $\mathbb{K}_k[X] = \mathrm{Vect}(b) \subset F$. En particulier, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $F = \mathbb{K}[X]$. La réciproque étant claire, $\mathbb{K}[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et de dimension infinie.

4°)

$\diamond$ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $b = \left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0\leq i\leq n-1}$.
b est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Pour la suite, on pose $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$, $D\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = \dfrac{X^{i-1}}{(i-1)!}$, donc $\mathrm{mat}(D, b) = J$.
Notons u l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$ telle que, pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $u\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = c_i$, où $c = (c_0,\dots,c_{n-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
u envoie une base sur une base, donc c'est un isomorphisme.
Pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$, $uDu^{-1}(c_i) = uD\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = c_{i-1}$ et $uDu^{-1}(c_0) = 0$, donc $\mathrm{mat}(uDu^{-1}, c) = J$, ce qui prouve que uDu^{-1} est l'endomorphisme canoniquement associé à J, que l'on notera encore J.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Notons (C) la condition "F est stable par J".
Ainsi, $(C) \iff J(F) \subset F \iff uDu^{-1}(F) \subset F \iff D(u^{-1}(F)) \subset u^{-1}(F)$. Alors d'après la question 2, $(C) \iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\ u^{-1}(F) = \mathbb{K}_k[X]$,
or $u(\mathbb{K}_k[X]) = u\left(\mathrm{Vect}\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0\leq i\leq k}\right) = \mathrm{Vect}\left(u\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0\leq i\leq k}\right) = \mathrm{Vect}((c_i)_{0\leq i\leq k})$. Ainsi, on a montré que les sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathbb{K}^n$ stables par J sont exactement les $\mathrm{Vect}((c_i)_{0\leq i\leq k}$, pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$.
$\diamond$ On peut retrouver ce résultat directement :
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ stable par J. Notons $p = \dim(F)$.
On sait démontrer que, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (décomposition par blocs selon la partition de n suivante : $n = k + (n-k)$). En particulier, $J^n = 0$.
Notons $f = J|_F^F$. On vérifie alors que $f^n = 0$, donc f est un endomorphisme nilpotent sur un espace vectoriel de dimension p. On sait alors montrer que $f^p = 0$. On en déduit que $F \subset \mathrm{Ker}(J^p)$, or $J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}(J^p) = \mathrm{Vect}(c_0,\dots,c_{p-1})$, donc $F \subset \mathrm{Vect}(c_0,\dots,c_{p-1})$, mais ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension, ce qui conclut.

Exercice 23.22 :

1°) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
Notons $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la $i^{\text{ème}}$ composante de Me vaut $\displaystyle\sum_{j=1} m_{i,j} = 1$,
donc $M \in \mathcal{E} \iff Me = e$.
Mais e est non nul, donc si $M \in \mathcal{E}$ alors 1 est une valeur propre de M.

2°) Soit $(M,N)\in\mathcal{E}^2$. Pour tout $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}$, le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient de MN vaut $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j}$, donc les coefficients de MN sont strictement positifs.
$MNe = M(Ne) = Me = e$, donc $MN\in\mathcal{E}$.

3°) Soient $M=(m_{i,j})\in\mathcal{E}$ et $\lambda\in Sp_{\mathbb{C}}(M)$.

Il existe $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ tel que $MX=\lambda X$.

Soit $i\in\mathbb{N}_n$. Egalons les $i^{\text{èmes}}$ composantes dans la relation précédente : $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j = \lambda x_i$.
D'après l'inégalité triangulaire, en tenant compte du fait que les coefficients de M sont dans $\mathbb{R}_+$, $(1)\ :\ |\lambda||x_i|\leq\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}|x_j|$.
Posons $x=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$. Il existe $i_0\in\mathbb{N}_n$ tel que $x=|x_{i_0}|$.
L'inégalité (1) pour $i=i_0$ implique $|\lambda|x\leq x\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=x$, or $x>0$ car $X\neq 0$, donc $|\lambda|\leq 1$.

4°) Soit $M=(m_{i,j})\in\mathcal{E}$. Soit $\lambda\in Sp(M)$ telle que $|\lambda|=1$.
Il existe $X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ tel que $MX=\lambda X$. Il existe $i_0\in\mathbb{N}_n$ tel que $|x_{i_0}|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$.
Alors, $|x_{i_0}| = |\lambda x_{i_0}| = \Big|\sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j}x_j\Big| \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j}|x_j| \overset{2)}{\leq} |x_{i_0}|\sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} = |x_{i_0}|$. On retrouve la même quantité $|x_{i_0}|$ à gauche et à droite de cette succession d'inégalités, donc toutes ces inégalités sont des égalités.
Ainsi, d'après (2), pour tout $j\in\mathbb{N}_n$, $|x_j|=|x_{i_0}|$, ainsi le module de x_j ne dépend pas de j.
Et d'après (1), on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, donc il existe $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $j\in\mathbb{N}_n$, $M_{i_0,j}x_j\in\mathbb{R}_+e^{i\theta_0}$, donc l'argument de x_j ne dépend pas de j.

On en déduit que X est colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, donc que $\lambda=1$.

Ceci démontre en outre que $E_1^M=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, donc si l'on suppose de plus que M est diagonalisable, alors M est semblable à $D=\mathrm{diag}(1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, avec $|\lambda_i|<1$ pour tout $i\geq 2$, donc M^p tend lorsque p tend vers $+\infty$ vers une matrice semblable à $D=\mathrm{diag}(1,0,\ldots,0)$.