

Résumé de cours :
Semaine 31, du 26 mai au ... 26 mai.

Espaces euclidiens (début)

1 Définition d'un produit scalaire

Notation. E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition. $\varphi \in L_2(E)$ est définie si et seulement si $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) \neq 0$.

Définition. $\varphi \in L_2(E)$ est positive si et seulement si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.

Définition. Un **produit scalaire** est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z)$;
- $x \neq 0 \implies \varphi(x, x) > 0$.

Un **espace préhilbertien réel** est un couple (E, φ) , où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et où φ est un produit scalaire sur E .

2 Exemples

- ◇ Si $e = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E , $\left(\sum_{i \in I} x_i e_i, \sum_{i \in I} y_i e_i \right) \mapsto \sum_{i \in I} x_i y_i$ est un p.s sur E .
- ◇ $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

Alors, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n, \varphi(X, Y) = {}^tXY$.

- ◇ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ◇ En posant $\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. ◇ Pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, $l^p = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^p < \infty\}$.

◇ Notons l^∞ l'ensemble des suites bornées de réels.

Propriété. l^1, l^2 et l^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

De plus si (a_n) et (b_n) sont dans l^2 , alors $(a_n b_n)$ est un élément de l^1 .

Propriété. Pour tout $(u_n), (v_n) \in l^2$, on pose $((u_n)|(v_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$.

l^2 muni de $(\cdot | \cdot)$ est un espace préhilbertien.

3 Identités remarquables

Notation. E est un espace préhilbertien réel. Son produit scalaire sera noté $(\cdot|\cdot)$.

Définition. Pour tout $x \in E$, la norme de x est $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Formule. Pour tout $((x, y), \alpha) \in E^2 \times \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \|\alpha x\| & = & |\alpha| \|x\|, \\ \|x + y\|^2 & = & \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y), \\ \|x - y\|^2 & = & \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y), \\ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 & = & 4(x|y), \\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 & = & 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{array}$$

La dernière formule est la **formule du parallélogramme** ou **formule de la médiane**.

Les seconde, troisième et quatrième formules sont des **formules de polarisation**.

Théorème de Pythagore : $(x|y) = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.