

MPSI 2  
Programme des colles de mathématiques.  
Semaine 27 : du lundi 1er juin au vendredi 5

## Algèbre linéaire, AVEC les déterminants

### Liste des questions de cours

- 1°) Enoncer puis établir les liens entre “antisymétrique” et “alternée” pour une application  $p$ -linéaire.
- 2°) Lorsque  $e$  est une base de  $E$ , donner la définition de  $\det_e$  : on proposera deux formules et l'on montrera qu'elles sont égales.
- 3°) Si  $e$  est une base de  $E$ , montrer que  $\det_e$  est alternée.
- 4°) Montrer que pour tout  $f \in A_n(E)$ ,  $f = f(e) \det_e$ .
- 5°) Donner et justifier la définition du déterminant d'un endomorphisme.
- 6°) Si  $f, g \in L(E)$ , que peut-on dire de  $\det(fg)$  ? Démontrez-le.
- 7°) Enoncer et démontrer la formule du développement de  $\det(M)$  selon l'une de ses colonnes.
- 8°) Montrer que  $M^t \text{Cof}(M) = {}^t \text{Cof}(M)M = \det(M)I_n$ .
- 9°) Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ? Démontrez-le.
- 10°) Enoncer et démontrer les formules de Cramer.
- 11°) Calcul du déterminant de Vandermonde.
- 12°) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$ , montrer que le polynôme caractéristique de  $u|_F^F$  divise celui de  $u$ .

## 1 Programmes précédents

Les programmes de colles précédents, portant sur l'algèbre linéaire, sont à réviser.

## 2 Les déterminants

**Notation.**  $\mathbb{K}$  désigne un corps quelconque.

### 2.1 Applications multilinéaires

Formes  $p$ -linéaires, formes bilinéaires.

Formes  $p$ -linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

alternée  $\implies$  antisymétrique. La réciproque est vraie lorsque  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ .

## 2.2 Les trois notions de déterminants

### 2.2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

**Notation.**  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ , avec  $n > 0$ .

Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , le "volume algébrique" de l'hyperparallélépipède défini par  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$  est nécessairement une forme  $n$ -linéaire alternée en fonction de  $x$ .

**Notation.** On note  $A_n(E)$  l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées.

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , si  $e$  est une base de  $E$ , on pose

$$\det_e(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n e_{\sigma(j)}^*(x_j) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n e_j^*(x_{\sigma(j)}).$$

Si  $e$  est une base de  $E$ , pour tout  $f \in A_n(E)$ ,  $f = f(e) \det_e$ .

$A_n(E)$  est la droite vectorielle dirigée par  $\det_e$ .

### 2.2.2 Déterminant d'une matrice

$$\det(M) = \det({}^t M).$$

Formule de Sarrus.

### 2.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit  $u \in L(E)$ .  $\det(u)$  est l'unique scalaire tel que  $\forall f \in A_n(E), \forall x \in E^n, f(u(x)) = (\det(u))f(x)$ .

Si  $e$  est une base de  $E$  et  $u \in L(E)$ ,  $\det_e(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_e(x_1, \dots, x_n)$ .

$\det(u) = \det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$ .

Pour toute base  $e$  de  $E$  et pour tout  $u \in L(E)$ ,  $\det(u) = \det(\text{Mat}(u, e))$ .

## 2.3 Propriétés du déterminant

Modification du déterminant lors d'une opération élémentaire portant sur les lignes ou sur les colonnes.

Pour tout  $f, g \in L(E)$ ,  $\det(fg) = \det(f) \times \det(g)$ .

$x$  est une base si et seulement si  $\det_e(x) \neq 0$ .

$u \in GL(E)$  si et seulement si  $\det(u) \neq 0$  et dans ce cas,  $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$ .

$A \in GL_n(\mathbb{K})$  si et seulement si  $\det(A) \neq 0$  et dans ce cas,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

Groupe spécial linéaire de  $E$  :  $SL(E) = \{u \in L(E) / \det(u) = 1\}$ .

Le déterminant est un invariant de similitude.

## 2.4 Calcul des déterminants

Mineurs et cofacteurs.

Développement de  $\det(M)$  selon l'une des ses lignes ou de ses colonnes.

Comatrice  $Com(M)$ .  $M^t Com(M) = {}^t Com(M)M = \det(M)I_n$ .

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Formules de Cramer.

## 2.5 Exemples de déterminants.

Déterminant de Vandermonde.

Déterminants tridiagonaux : relation de récurrence.

Déterminants circulants : On ajoute toutes les lignes (ou colonnes).

## 3 Le polynôme caractéristique

Il ne s'agit que d'une introduction à la théorie de la réduction. Aucune connaissance n'est attendue des élèves concernant les polynômes annulateurs, le lemme de décomposition des noyaux, la trigonalisation.

### 3.1 Définitions

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\chi_M = \det(XI_n - M)$ .

$\chi^t M = \chi_M$ ,

si  $M$  est triangulaire, alors  $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^n (X - M_{i,i})$ ,

deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (réciproque fausse).

Lorsque  $u \in L(E)$ ,  $\chi_u = \chi_{\text{mat}(u,e)}$  où  $e$  est une base de  $E$ .

Le spectre de  $u$  est l'ensemble des racines dans  $\mathbb{K}$  de  $\chi_u$ .

### 3.2 Propriétés du polynôme caractéristique

$\chi_u(X) = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$ .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $u$  admet au moins un vecteur propre.

Si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ ,  $\text{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} m(\lambda)\lambda$  et  $\det(u) = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ .

$\forall \lambda \in Sp(u) \quad 1 \leq \dim(\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u)) \leq m(\lambda)$ .

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et, pour tout  $\lambda \in Sp(u)$ ,  $m(\lambda) = \dim(\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u))$ .

## Prévisions pour la semaine suivante :

---

Début sur les espaces euclidiens