

DS 9

Les calculatrices sont interdites.

Exercice :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Décomposer $\frac{1}{(X-1)^2(X^n-1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Problème : Réduction de Jordan

Pour tout ce problème, \mathbb{K} désigne un corps quelconque et E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Partie I : Décomposition des noyaux

Dans toute cette partie, u désigne un élément quelconque de $L(E)$.

Si $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on notera $P(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^k$: $P(u)$ est un élément de $L(E)$.

1°) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & L(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème de décomposition des noyaux, dont voici l'énoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soit P_1, \dots, P_n n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors $\bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i(u)) = \text{Ker}\left(\left[\prod_{i=1}^n P_i\right](u)\right)$.

2°) Montrer qu'il suffit d'établir ce théorème lorsque $n = 2$.

3°) Montrer ce théorème lorsque $n = 2$ (on pourra utiliser le théorème de Bézout).

4°) Application : résoudre les équations différentielles suivantes, en l'inconnue y :
 $y^{(4)} = 2y'' - y$ et $y^{(4)} - 2y'' + y = \text{ch}(x)$.

Partie II : Diagonalisation et polynômes simplement scindés

Pour toute la suite, on suppose que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie strictement positive et on pose $n = \dim(E)$.

Convention : Lorsque M est une matrice, on convient de noter $M_{i,j}$ son coefficient de position (i, j) .

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n scalaires de \mathbb{K} , on note $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

5°) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $P(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

6°) Soit $u \in L(E)$. On suppose que u est diagonalisable.

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, avec P non nul et simplement scindé : on rappelle qu'un polynôme est simplement scindé si et seulement si il est de la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i), \text{ où } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ sont deux à deux distincts.}$$

7°) Soit $u \in L(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, avec P non nul et simplement scindé.

8°) On suppose que la caractéristique de \mathbb{K} est nulle.

On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $M_{i,i} = 2$ et pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i \neq j$, $M_{i,j} = 1$.

En utilisant les questions précédentes, montrer que M est diagonalisable.

Diagonaliser M .

9°) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\phi_A(M) = \text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M$. ϕ_A est-elle diagonalisable ?

10°) On suppose que G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ (l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Montrer que tout élément de G est diagonalisable.

Partie III : Décomposition de Dunford

Jusqu'à la fin du problème, on fixe $u \in L(E)$.

11°) Rappeler sans démonstration quelle est la dimension de $L(E)$. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(u) = 0$.

12°) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Montrer que les valeurs propres dans \mathbb{K} de u sont des racines de P .

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Jusqu'à la fin de ce problème, on note $Sp(u)$ le spectre de u , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de u .

13°) Montrer qu'il existe une famille $(m_\lambda)_{\lambda \in Sp(u)}$ d'entiers strictement positifs telle que $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda})$.

Pour la suite de ce problème, on notera, pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $N_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda})$.

14°) Soit $\lambda \in Sp(u)$. Montrer qu'on peut poser $u_\lambda = u|_{N_\lambda}$.

Montrer que $u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda}$ est nilpotent.

15°) Montrer qu'il existe deux endomorphismes d et v de E tels que

- $u = d + v$;
- d est diagonalisable;
- v est nilpotent;
- d et v commutent : $dv = vd$.

Il s'agit de la décomposition de Dunford de u .

Partie IV : Réduction de Jordan

\mathbb{K} désigne à nouveau un corps quelconque.

Soit $v \in L(E)$ un endomorphisme que l'on suppose nilpotent.

16°) Montrer qu'on peut définir $i = \min(\{k \in \mathbb{N} / v^k = 0\})$. On dit que i est l'indice de nilpotence de v .

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, v(x), \dots, v^{i-1}(x))$ est libre.

En déduire que $i \leq n$.

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}_n$, le (k, ℓ) -ème coefficient de J_n est égal à 1 si $\ell = k + 1$ et à 0 sinon. En particulier, $J_1 = 0$.

17°) Lorsque $i = n$, montrer qu'il existe une base b de E dans laquelle la matrice de v est égale à J_n .

18°) Soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E .

On suppose que $v(b_1) = 0$ et que, pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, $v(b_j) \in \{b_{j-1}, 0\}$.

Quelle est la forme de la matrice de v dans la base b ?

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $K_m = \text{Ker}(v^m)$.

19°) Montrer que la suite $(K_m)_{0 \leq m \leq i}$ est strictement croissante au sens de l'inclusion.

20°) Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq i - 1$.

On suppose que F_p est un sous-espace vectoriel de E tel que $F_p \oplus K_p = K_{p+1}$.

Montrer que $v(F_p) \oplus K_{p-1} \subset K_p$ et que $v|_{F_p}^{v(F_p)}$ est un isomorphisme.

21°) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est de la

forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 où pour tout $j \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$.

22°) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la

matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \lambda_{n-1} & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$
 où pour tout $j \in \mathbb{N}_{n-1}$,

$\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ et où pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_j \in Sp(u)$.

Il s'agit de la réduction de Jordan de u .