

DS 9 : un corrigé.

Barème, sur un total de 69 points

- Exercice : 7 points.
- Le problème : 62 points
 - Partie I, 17 points : 2,2,4,5+4.
 - Partie II, 15 points : 1,2,2,2+3,3,2.
 - Partie III, 11 points : 1,2,3,2,3.
 - Partie IV, 19 points : 3,1,1,2,2,8,2.

Exercice :

La partie entière étant nulle, la décomposition en éléments simples

de $F(X) = \frac{1}{(X-1)^2(X^n-1)}$ est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega^k}, \text{ où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

◇ Soit $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. D'après le cours,

$$\lambda_k = \frac{1}{[(X-1)^2(X^n-1)]'(\omega^k)} = \frac{1}{[(X^n-1)2(X-1) + (X-1)^2nX^{n-1}](\omega^k)},$$

$$\text{donc } \lambda_k = \frac{1}{(\omega^k-1)^2n\omega^{kn-k}} = \frac{\omega^k}{n(\omega^k-1)^2} = \frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{ne^{2ik\frac{\pi}{n}}(e^{ik\frac{\pi}{n}}-e^{-ik\frac{\pi}{n}})^2} = \frac{1}{n(2i \sin \frac{k\pi}{n})^2},$$

$$\text{donc } \boxed{\lambda_k = -\frac{1}{4n \sin^2 \frac{k\pi}{n}}}.$$

◇ Pour calculer a , b et c , on procède par développement limité : D'après la décomposition de F en éléments simples, $(t-1)^3F(t) = c + b(t-1) + a(t-1)^2 + (t-1)^3G(t)$, où G est une application continue, donc bornée, au voisinage de 1.

Ainsi, $(t-1)^3F(t) = c + b(t-1) + a(t-1)^2 + o((t-1)^2)$.

$$\text{D'autre part, en posant } u = t-1, (t-1)^3F(t) = \frac{u^3}{u^2((u+1)^n-1)},$$

donc d'après la formule du binôme de Newton (le résultat reste vrai pour $n \in \{1, 2\}$),

$$(t-1)^3F(t) = \frac{u}{(nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}u^3 + o(u^3))} = \frac{1}{n}(1+x)^{-1},$$

où $x = \frac{(n-1)}{2}u + \frac{(n-1)(n-2)}{6}u^2 + o(u^2)$ donc

$$\begin{aligned} (t-1)^3 F(t) &= \frac{1}{n}(1-x+x^2+o(x^2)) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1-n}{2}u + u^2\left(-\frac{(n-1)(n-2)}{6} + \frac{(n-1)^2}{4}\right) + o(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1-n}{2}u + u^2\frac{n-1}{12}(-2(n-2) + 3(n-1)) + o(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1-n}{2n}(t-1) + \frac{n^2-1}{12n}(t-1)^2 + o((t-1)^2). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$c = \frac{1}{n}$ et $b = \frac{1-n}{2n}$ et $a = \frac{n^2-1}{12n}$. En conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)^2(X^n-1)} = \frac{n^2-1}{12n(X-1)} + \frac{1-n}{2n(X-1)^2} + \frac{1}{n(X-1)^3} - \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(\sin^2 \frac{k\pi}{n})(X - e^{2ik\frac{\pi}{n}})}}$$

Problème : Réduction de Jordan

Partie I : Décomposition des noyaux

1°) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, notons $\varphi(P) = P(u)$.

◇ $\varphi(1) = \varphi(X^0) = u^0 = 1_{L(E)}$.

• Soient $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, $Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

◇ $\varphi(\alpha P) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) X^n \right)(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) u^n$
 $= \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n u^n = \alpha \varphi(P)$.

◇ $\varphi(P+Q) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n + c_n) X^n \right)(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n + c_n) u^n = \varphi(P) + \varphi(Q)$.

◇ $\varphi(PQ) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n (b_{n-k} c_k) \right) X^n \right)(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n (b_{n-k} c_k) \right) u^n$. D'autre part,

$\varphi(P)\varphi(Q) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n u^n \right) \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u^n \right)$, donc par distributivité dans l'algèbre $L(E)$,

$\varphi(P)\varphi(Q) = \sum_{k, h \in \mathbb{N}} b_h c_k u^{h+k}$, puis par sommation par paquets,

$\varphi(P)\varphi(Q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k+h=n} b_h c_k \right) u^n$, donc $\varphi(P)\varphi(Q) = \varphi(PQ)$.

Ainsi, φ est bien un morphisme d'algèbres.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, notons $R(n)$ l'assertion suivante :

si P_1, \dots, P_n sont n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors

$$\bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i(u)) = \text{Ker}\left(\left[\prod_{i=1}^n P_i\right](u)\right).$$

L'énoncé demande de montrer que si $R(2)$ est prouvé alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $R(n)$. On suppose donc $R(2)$ et on procède par récurrence :

Soit $n \geq 2$ tel que $R(n)$. Soit P_1, \dots, P_{n+1} $n + 1$ polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux

premiers entre eux. Posons $P = \prod_{i=1}^n P_i$ et $Q = P_{n+1}$. D'après le cours, P est premier

avec Q , donc d'après $R(2)$, en posant $K = \text{Ker}(P(u))$ et $G = \text{Ker}(Q(u))$,
 $K \oplus G = \text{Ker}((PQ)(u))$.

De plus, d'après $R(n)$, en posant $F_i = \text{Ker}(P_i(u))$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $F_1 + \dots + F_n$ est une somme directe et $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \text{Ker}(P(u))$. Alors d'après l'associativité de la notion de somme directe (cf cours), $F_1 + \dots + F_n + G$ est une somme directe et $(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) \oplus G = F_1 \oplus \dots \oplus F_n \oplus G$. On a donc montré que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_{n+1}(u)) &= \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)) = \text{Ker}((PQ)(u)) \\ &= \text{Ker}\left(\left[\prod_{i=1}^{n+1} P_i\right](u)\right). \end{aligned}$$

Ceci prouve $R(n + 1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

3°) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.

◇ D'après le théorème de Bezout, il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$,

donc $\text{Id}_E = \varphi(1) = \varphi(A)\varphi(P) + \varphi(B)\varphi(Q) = A(u)P(u) + B(u)Q(u)$.

On en déduit que, pour tout $x \in E$, $x = (AP)(u)(x) + (BQ)(u)(x)$.

◇ Soit $x \in \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u))$.

Alors $x = A(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x)) = 0$, car $P(u)(x) = Q(u)(x) = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) = \{0\}$, ce qui prouve que la somme est directe.

◇ Soit $x \in \text{Ker}((PQ)(u))$. $x = [(AP)(u)](x) + [(BQ)(u)](x)$, or

$Q(u)([(AP)(u)](x)) = (QAP)(u)(x) = A(u)([(PQ)(u)](x)) = 0$ et

$P(u)([(BQ)(u)](x)) = B(u)([(PQ)(u)](x)) = 0$, donc

$[(AP)(u)](x) \in \text{Ker}(Q(u))$ et $[(BQ)(u)](x) \in \text{Ker}(P(u))$.

Ainsi $x \in \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

On a prouvé que $\text{Ker}((PQ)(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

◇ l'inclusion réciproque est plus simple : Pour tout $v, w \in L(E)$, $\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(vw)$, car si $x \in E$ vérifie $w(x) = 0$, alors $(vw)(x) = v(w(x)) = v(0) = 0$.

En particulier, avec $v = P(u)$ et $w = Q(u)$,

$\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}((P(u) \circ Q(u))) = \text{Ker}((PQ)(u))$,

de plus, $(PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$, donc on a aussi $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}((PQ)(u))$.

$\text{Ker}((PQ)(u))$ est donc un sous-espace vectoriel de E qui contient $\text{Ker}(P(u)) \cup \text{Ker}(Q(u))$,

donc il contient $\text{Vect}(\text{Ker}(P(u)) \cup \text{Ker}(Q(u))) = \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$.

On a donc montré que $\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$, ce qui conclut.

4°) Notons (E) et (E') les deux équations différentielles de l'énoncé.

◇ Soit y une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} solution de (E) .

Alors y est nécessairement quatre fois dérivable.

On montre par récurrence sur n que y est de classe C^n : en effet, $y^{(4)} = 2y'' - y$ est dérivable donc continue, donc y est de classe C^4 , et si y est C^n pour $n \geq 4$, $y^{(4)} = 2y'' - y$ est C^{n-2} donc y est C^{n+2} , donc a fortiori C^{n+1} .

Ainsi toute solution de (E) est un vecteur de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On peut donc se contenter de chercher les solutions de (E) dans l'espace vectoriel E .

◇ Notons D l'application de E dans E définie par : pour tout $f \in E$, $D(f) = f'$. Clairement $D \in L(E)$ et pour tout $y \in E$, $(E) \iff D^4(y) = 2D^2(y) - y$, donc en notant \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E) ,

$\mathcal{S} = \text{Ker}(D^4 - 2D^2 + \text{Id}_E) = \text{Ker}(P(D))$, où $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1$.

◇ On a $P(X) = (X^2 - 1)^2 = (X - 1)^2(X + 1)^2$.

$\frac{1}{2}((X + 1) - (X - 1)) = 1$, donc $(X - 1) \wedge (X + 1) = 1$. D'après le cours, $(X + 1)^2$ et $(X - 1)^2$ sont premiers entre eux. Alors, d'après la question précédente,

$\mathcal{S} = \text{Ker}((D - \text{Id}_E)^2) \oplus \text{Ker}((D + \text{Id}_E)^2)$.

De plus $y \in \text{Ker}((D - \text{Id}_E)^2) \iff y'' - 2y' + y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique vaut $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, donc d'après le cours, l'ensemble des solutions, à savoir $\text{Ker}((D - \text{Id}_E)^2)$, est l'ensemble des fonctions de la forme $(ax + b)e^x$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

De même $y \in \text{Ker}((D + \text{Id}_E)^2) \iff y'' + 2y' + y = 0$. Cette équation différentielle a pour polynôme caractéristique $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$, donc $\text{Ker}((D + \text{Id}_E)^2)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $(cx + d)e^{-x}$, avec $c, d \in \mathbb{R}$.

En conclusion, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E) est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto (ax + b)e^x + (cx + d)e^{-x} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}} .$$

◇ **Résolution de (E') .** $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ainsi, par le principe de superposition des solutions, il suffit de chercher une solution particulière $y_{p,1}$ de (E_1) : $y^{(4)} - 2y'' + y = \frac{1}{2}e^x$ et une solution particulière $y_{p,2}$ de (E_2) : $y^{(4)} - 2y'' + y = \frac{1}{2}e^{-x}$.

• **Résolution de (E_1)** : comme 1 est racine double du polynôme $(X - 1)^2(X + 1)^2$, on cherche une solution de la forme $y_1 = x \mapsto ax^2e^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = ax^2$ et $g(x) = e^x$. La formule de Leibniz donne

$$y_1'' = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} f^{(k)} g^{(2-k)} = (ax^2 + 2 \cdot 2ax + 2a)e^x = a(x^2 + 4x + 2)e^x, \text{ et}$$

$$y_1^{(4)} = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} f^{(k)} g^{(4-k)} = (ax^2 + 4 \cdot 2ax + 6 \cdot 2a)e^x = a(x^2 + 8x + 12)e^x.$$

En substituant dans (E_1) , y_1 est solution si et seulement si

$$\frac{1}{2}e^x = y_1^{(4)} - 2y_1'' + y_1 = a[(x^2 + 8x + 12) - 2(x^2 + 4x + 2) + x^2]e^x = 8ae^x,$$

ainsi, lorsque $8a = \frac{1}{2}$, soit $a = \frac{1}{16}$, $y_{p,1} = x \mapsto \frac{x^2}{16}e^x$ est solution de (E_1) .

- *Résolution de (E_2)* : Posons $y_2(x) = y_1(-x)$. Alors $y_2 \in E$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_2''(x) = y_1''(-x)$, $y_2^{(4)}(x) = y_1^{(4)}(-x)$, donc y_2 est une solution particulière de (E_2) .
- On en déduit qu'une solution particulière de (E') est $x \mapsto \frac{x^2}{16}(e^x + e^{-x}) = \frac{x^2}{8}\text{ch}(x)$.

En conclusion, la solution générale de (E') est

$$\boxed{y = x \mapsto (ax + b)e^x + (cx + d)e^{-x} + \frac{x^2}{8}\text{ch}(x)} \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Partie II : Diagonalisation et polynômes simplement scindés

5°) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

◇ Pour $k = 0$: $(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^0 = I_n = \text{diag}(1, \dots, 1) = \text{diag}(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$.

◇ Hérédité : si $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$, alors $D^{k+1} = D \cdot D^k$; d'après le cours, le produit de deux matrices diagonales est diagonal, et le (i, i) -ème coefficient vaut $\lambda_i \cdot \lambda_i^k = \lambda_i^{k+1}$.

Soit maintenant $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Notons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Alors, avec la convention de l'énoncé, $[P(D)]_{i,j} = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k [D^k]_{i,j}$, donc lorsque $i \neq j$,

$[P(D)]_{i,j} = 0$ et d'après la récurrence précédente, $[P(D)]_{i,i} = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \lambda_i^k = P(\lambda_i)$. Ceci

prouve que $P(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

6°) Soit u diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Posons $P = \prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)$. P est non nul et simplement scindé par définition.

◇ Soit \mathcal{B} une base de E diagonalisant u . Dans cette base, la matrice de u est $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ où chaque $\mu_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. D'après la question précédente, $P(u)$ a pour matrice $\text{diag}(P(\mu_1), \dots, P(\mu_n)) = 0$, car $P(\mu_i) = 0$ pour tout i . Donc $P(u) = 0$.

7°)

◇ (\Rightarrow) Résulte de la question 6.

◇ (\Leftarrow) Supposons qu'il existe $P = \prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)$ simplement scindé avec $P(u) = 0$. Les

polynômes $(X - \lambda_j)$, pour $j = 1, \dots, k$, sont deux à deux premiers entre eux car, pour $i, j \in \mathbb{N}_k$ avec $i \neq j$, $\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}((X - \lambda_j) - (X - \lambda_i)) = 1$. Alors, d'après les questions 2

et 3, $E = \text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{j=1}^k \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$, ce qui est exactement une décomposition

de E en somme directe de sous-espaces propres. Donc u est diagonalisable.

8°) ◇ Notons A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Ainsi, $M = I_n + A$.

Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Alors $M = P(I_n + D)P^{-1}$, donc pour répondre à la question, il suffit de montrer que A est diagonalisable puis de diagonaliser A .

◇ Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $(A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}A_{k,j} = n$, donc $A^2 = nA$.

Ainsi, A est annulée par le polynôme $X(X - n.1_{\mathbb{K}})$. Il est simplement scindé car $n \neq 0$ et car $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$, donc $n.1_{\mathbb{K}} \neq 0$.

D'après la question 7, A et M sont diagonalisables.

◇ D'après la solution de la question précédente, $Sp(A) \subset \{0, n\}$.

Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Ae_1 est égal à la somme des colonnes de A , donc $Ae_1 = ne_1$.

Notons $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de \mathbb{K}^n .

Pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, posons $e_j = c_1 - c_j$. Alors Ae_j est égale à la première colonne de A moins sa j -ième colonne. Ainsi, $Ae_j = 0$.

Ceci montre que la famille $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille de vecteurs propres de A .

Elle est libre car, si $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = 0$, alors

$$0 = \alpha_1 \sum_{i=1}^n c_i + \sum_{j=2}^n \alpha_j (c_1 - c_j) = \sum_{j=2}^n (\alpha_1 - \alpha_j) c_j + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) c_1.$$

c étant libre, on en déduit que pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, $\alpha_j = \alpha_1$, puis que

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = n\alpha_1 = (n.1_{\mathbb{K}})\alpha_1, \text{ or } \text{car}(\mathbb{K}) = 0, \text{ donc } \alpha_1 = 0 \text{ et pour tout } j \in \{2, \dots, n\},$$

$\alpha_j = 0$. Ainsi, e est une base de vecteurs propres de A , ce qui redémontre que A est diagonalisable. De plus, en notant P la matrice de passage de c vers e , d'après la formule de changement de bases, $A = P \text{diag}(n, 0, \dots, 0) P^{-1}$.

En conclusion, on peut diagonaliser M :

$$M = P \text{diag}(n+1, 1, \dots, 1) P^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9°) L'application trace étant linéaire, on vérifie aisément que ϕ_A est un endomorphisme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi_A^2(M) = \text{Tr}(\phi_A(M))A - \text{Tr}(A)\phi_A(M)$,

or $\text{Tr}(\text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M) = \text{Tr}(M)\text{Tr}(A) - \text{Tr}(A)\text{Tr}(M) = 0$,

donc $\phi_A^2(M) = -\text{Tr}(A)\phi_A(M)$. Ceci prouve que $\phi_A^2 + \text{Tr}(A)\phi_A = 0$ donc un polynôme annulateur de ϕ_A est $Q(X) = X(X + \text{Tr}(A))$.

• Si $A = 0$: $\phi_A = 0$, donc ϕ_A est diagonalisable.

• Supposons que $A \neq 0$ et $\text{Tr}(A) = 0$.

Soit $\lambda \in Sp(\phi_A)$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M \neq 0$ et $\phi_A(M) = \lambda M$. Alors

$$0 = \phi_A^2(M) = \lambda^2 M, \text{ donc } \lambda = 0.$$

Si ϕ_A était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait nulle,

donc on aurait $\phi_A = 0$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $0 = \phi_A(M) = \text{Tr}(M)A$, or $A \neq 0$, donc $\text{Tr}(M) = 0$. C'est faux car $\text{Tr}(\text{diag}(1, 0, \dots, 0)) = 1_{\mathbb{K}} \neq 0$. Ainsi, dans ce cas, ϕ_A n'est pas diagonalisable.

• Supposons enfin que $\text{Tr}(A) \neq 0$: alors $Q(X) = X(X + \text{Tr}(A))$ est simplement scindé, donc d'après la question 7, ϕ_A est diagonalisable.

Conclusion : $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A = 0 \text{ ou } \text{Tr}(A) \neq 0}$.

10°) Soit $M \in G$. Comme G est un groupe fini d'ordre $N = |G|$, d'après le théorème de Lagrange $M^N = I_n$, donc $P(X) = X^N - 1$ est un polynôme annulateur de M . Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les racines de P sont les racines N -ièmes de l'unité, qui sont au nombre de N et deux à deux distinctes. Donc P est simplement scindé sur \mathbb{C} .

D'après la question 7, M est diagonalisable.

Partie III : Décomposition de Dunford

11°) D'après le cours, $\boxed{\dim(L(E)) = n^2}$.

◇ La famille $(u^0, u^1, u^2, \dots, u^{n^2})$ est une famille de $n^2 + 1$ éléments de $L(E)$ donc elle est liée : il existe $a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k u^k = 0$.

Alors, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est non nul et vérifie $P(u) = 0$.

12°) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . Il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$. Par récurrence sur k , on montre que $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Posons $P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$. Alors $P(u)(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^k(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \lambda^k x = P(\lambda)x$.

Comme $P(u) = 0$ et $x \neq 0$, on a $P(\lambda) = 0$: λ est bien racine de P .

On a donc montré que $Sp(u) \subset Rac(P)$, où $Rac(P)$ désigne l'ensemble des racines dans \mathbb{K} de P .

13°) D'après la question 11, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(u) = 0$.

Quitte à diviser P par son coefficient dominant, on peut supposer que P est unitaire.

D'après le théorème de d'Alembert, P est scindé, donc il existe une famille $(m_\lambda)_{\lambda \in Rac(P)}$

d'entiers strictement positifs telle que $P = \prod_{\lambda \in Rac(P)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$.

Les polynômes $(X - \lambda)^{m_\lambda}$, pour $\lambda \in Rac(P)$, sont deux à deux premiers entre eux, car ils n'ont pas de racine commune. D'après les questions 2 et 3,

$$E = \text{Ker}(0_{L(E)}) = \text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{\lambda \in Rac(P)} \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}).$$

D'après la question précédente, $Sp(u) \subset Rac(P)$. De plus, si $\lambda \in (Rac(P) \setminus Sp(u))$, alors $u - \lambda \text{Id}_E$ est inversible, donc $(u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}$ est également inversible et

$\text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}) = \{0\}$. On peut donc supprimer ce terme de la somme directe précédente. En conclusion, on a montré que $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda})$.

14°) \diamond Soit $x \in N_\lambda$. Comme u commute avec $u - \lambda \text{Id}_E$, $(u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}(u(x)) = u((u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in N_\lambda$. Ainsi, $u(N_\lambda) \subset N_\lambda$, ce qui permet de définir $u_\lambda = u|_{N_\lambda}$.

\diamond Soit $x \in N_\lambda$. Alors $(u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}(x) = 0$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $R(k)$ l'assertion suivante : $(u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})^k(x) = (u - \lambda \text{Id}_E)^k(x)$.

\diamond Pour $k = 0$, $(u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})^k(x) = x = (u - \lambda \text{Id}_E)^k(x)$.

\diamond Pour $k \geq 0$, supposons $R(k)$.

Alors $(u - \lambda \text{Id}_E)^{k+1}(x) = (u - \lambda \text{Id}_E)\left((u - \lambda \text{Id}_E)^k(x)\right) = (u - \lambda \text{Id}_E)\left((u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})^k(x)\right)$,

or $(u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})^k(x) \in N_\lambda$, donc $(u - \lambda \text{Id}_E)^{k+1}(x) = (u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})\left((u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})^k(x)\right)$,

ce qui prouve $R(k+1)$.

\diamond En particulier, pour $k = m_\lambda$, on obtient que $(u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})^{m_\lambda}(x) = 0$, pour tout $x \in N_\lambda$, donc $u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda}$ est un endomorphisme nilpotent de N_λ .

15°) \diamond Notons v et d les endomorphismes de E tels que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et pour tout $x \in N_\lambda$, $v(x) = (u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})(x)$ et $d(x) = \lambda x$. D'après le cours, ces dernières conditions définissent bien d et v de manière unique car $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda$.

\diamond Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et pour tout $x \in N_\lambda$, $d(x) + v(x) = u(x)$,

or $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda$, donc par linéarité, $d + v = u$.

\diamond De même, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et pour tout $x \in N_\lambda$,

$dv(x) = d(v(x)) = \lambda v(x) = v(\lambda x) = vd(x)$, donc $dv = vd$.

\diamond Dans une base adaptée à la précédente décomposition en somme directe de E , la matrice de d est diagonale, donc d est diagonalisable.

\diamond Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $(u_\lambda - \lambda \text{Id}_{N_\lambda})^{m_\lambda} = 0$. Posons $m = \max\{m_\lambda / \lambda \in \text{Sp}(u)\}$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et pour tout $x \in N_\lambda$, $v^m(x) = v^{m-m_\lambda}(v^{m_\lambda}(x)) = 0$, ce qui prouve que $v^m = 0$, donc que v est nilpotent.

Partie IV : Réduction de Jordan

16°) \diamond Comme v est nilpotent, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid v^k = 0\}$ est non vide, or c'est une partie de \mathbb{N} , donc d'après le cours, on peut définir $i = \min\{k \in \mathbb{N} \mid v^k = 0\}$.

\diamond On a $i \geq 1$ car $v^0 = \text{Id}_E \neq 0$ (puisque $\dim E \geq 1$). En particulier, $v^{i-1} \neq 0$, donc il existe $x \in E$ tel que $v^{i-1}(x) \neq 0$.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq i-1}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k v^k(x) = 0$.

Supposons que cette famille est non nulle.

On peut alors poser $m = \min(\{h \in \{0, \dots, i-1\} / \lambda_h \neq 0\})$. Ainsi, $\sum_{k=m}^{i-1} \lambda_k v^k(x) = 0$.

Pour tout $k > m$, $v^{i-1-m}(v^k(x)) = v^{k-(m+1)}(v^i(x)) = 0$, donc en appliquant v^{i-1-m} à l'égalité précédente, on obtient que $\lambda_m v^{i-1}(x) = 0$, or $v^{i-1}(x) \neq 0$, donc $\lambda_m = 0$, ce qui est faux. Ceci montre par l'absurde que la famille $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq i-1}$ est nulle, donc la famille $(x, v(x), \dots, v^{i-1}(x))$ est libre.

◇ Cette famille libre possède i éléments dans E (de dimension n), donc $i \leq n$.

17°) On suppose dans cette question que $i = n$. Il existe $x \in E$ tel que $v^{n-1}(x) \neq 0$. D'après la question précédente, $(x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$ est une famille libre de n vecteurs dans E (de dimension n) : c'est une base de E .

◇ Posons $b_k = v^{n-k}(x)$ pour $k = 1, \dots, n$. Ainsi $b_1 = v^{n-1}(x)$, $b_2 = v^{n-2}(x), \dots, b_n = x$.

Pour $k \geq 2$: $v(b_k) = v(v^{n-k}(x)) = v^{n-k+1}(x) = b_{k-1}$.

Pour $k = 1$: $v(b_1) = v(v^{n-1}(x)) = v^n(x) = 0$.

La matrice de v dans la base (b_1, \dots, b_n) est donc égale à
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire à J_n .

18°) La j -ème colonne de la matrice de v dans b contient les coordonnées de $v(b_j)$. Ainsi, pour $j \in \{2, \dots, n\}$, si $v(b_j) = b_{j-1}$, la j -ème colonne a un 1 en ligne $j-1$ et 0 ailleurs, et si $v(b_j) = 0$, la j -ème colonne est nulle.

Ceci prouve que la matrice de v est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$. Plus précisément, pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, ε_j est égal à 1 si $v(b_{j+1}) = b_j$ et à 0 sinon.

19°) Soit $m \in \{0, \dots, i-1\}$.

Il s'agit de montrer que K_m est strictement inclus dans K_{m+1} .

◇ Soit $x \in K_m$. Alors $v^m(x) = 0$, donc $v^{m+1}(x) = v(v^m(x)) = 0$ et $x \in K_{m+1}$.

Ceci prouve que $K_m \subset K_{m+1}$.

◇ Il existe $x \in E$ tel que $v^{i-1}(x) \neq 0$. Posons $y = v^{i-1-m}(x)$.

On a $v^m(y) = v^{i-1}(x) \neq 0$, donc $y \notin K_m$.

On a $v^{m+1}(y) = v^i(x) = 0$ donc $y \in K_{m+1}$.

Ainsi $K_{m+1} \neq K_m$, ce qui conclut.

20°) ◇ Soit $x \in F_p$. Alors $x \in K_{p+1}$, donc $v^p(v(x)) = v^{p+1}(x) = 0$. Ainsi, $v(x) \in K_p$.

Ceci prouve que $v(F_p) \subset K_p$. On sait déjà que $K_{p-1} \subset K_p$, donc $v(F_p) + K_{p-1} \subset K_p$.

◇ Soit $y \in v(F_p) \cap K_{p-1}$. Il existe $x \in F_p$ tel que $y = v(x)$.

Alors $v^p(x) = v^{p-1}(v(x)) = v^{p-1}(y) = 0$, donc $x \in K_p$. Or $x \in F_p$ et $F_p \cap K_p = \{0\}$ car la somme $F_p + K_p$ est supposée directe. Ainsi $x = 0$, puis $y = v(x) = 0$. Ceci prouve que $v(F_p) \cap K_{p-1} = \{0\}$, donc on a montré que $v(F_p) \oplus K_{p-1} \subset K_p$.

◇ Posons $w = v|_{F_p}^{v(F_p)}$, qui est clairement bien défini et linéaire.

Par construction, w est surjectif.

Soit $x \in \text{Ker}(w)$. Alors $x \in F_p$ et $v(x) = 0$, donc $x \in K_1 \subset K_p$ (car $1 \leq p$), donc $x \in F_p \cap K_p = \{0\}$, d'où $x = 0$. Ainsi, w est injectif. On a montré que $v|_{F_p}^{v(F_p)}$ réalise un isomorphisme de F_p dans $v(F_p)$, ce qui prouve notamment que $\dim(F_p) = \dim(v(F_p))$.

21°) ◇ On commence par choisir un sous-espace vectoriel F_{i-1} tel que

$$E = K_i = F_{i-1} \oplus K_{i-1}.$$

On note $d_{i-1} = \dim(F_{i-1})$ et on choisit une base de F_{i-1} , notée $(e_1^{(i-1)}, \dots, e_{d_{i-1}}^{(i-1)})$.

Lorsque $i \geq 2$, la question précédente montre que $v(F_{i-1}) \oplus K_{i-2} \subset K_{i-1}$, donc il existe W_{i-2} tel que $K_{i-1} = v(F_{i-1}) \oplus W_{i-2} \oplus K_{i-2}$. On pose $F_{i-2} = v(F_{i-1}) \oplus W_{i-2}$, de sorte que $F_{i-2} \oplus K_{i-2} = K_{i-1}$.

On note $d_{i-2} = \dim(F_{i-2})$. On sait que $v|_{F_{i-1}}^{v(F_{i-1})}$ est un isomorphisme, donc en posant, $\boxed{\text{pour tout } j \in \mathbb{N}_{d_{i-1}}, e_j^{(i-2)} = v(e_j^{(i-1)})}$, la famille $(e_j^{(i-2)})_{1 \leq j \leq d_{i-1}}$ est une base de $v(F_{i-1})$. On la complète en une base $(e_j^{(i-2)})_{1 \leq j \leq d_{i-2}}$ de F_{i-2} .

On poursuit par récurrence descendante :

Soit $p \in \mathbb{N}_{i-1}$. Supposons construits des sous-espaces vectoriels F_{i-1}, \dots, F_p de E tels que, pour tout $h \in \{p, \dots, i-1\}$, $F_h \oplus K_h = K_{h+1}$ et

pour tout $h \in \{p+1, \dots, i-1\}$, $v(F_h) \subset F_{h-1}$.

Pour tout $h \in \{p, \dots, i-1\}$, on note $d_h = \dim(F_h)$ et on suppose construite une base $(e_j^{(h)})_{1 \leq j \leq d_h}$ de F_h telle que, lorsque $h \geq p+1$, $\boxed{\text{pour tout } j \in \mathbb{N}_{d_h}, e_j^{(h-1)} = v(e_j^{(h)})}$.

En particulier, on a $F_p \oplus K_p = K_{p+1}$, donc la question précédente montre que $v(F_p) \oplus K_{p-1} \subset K_p$, donc il existe W_{p-1} tel que $K_p = v(F_p) \oplus W_{p-1} \oplus K_{p-1}$. On pose $F_{p-1} = v(F_p) \oplus W_{p-1}$, de sorte que $F_{p-1} \oplus K_{p-1} = K_p$.

On note $d_{p-1} = \dim(F_{p-1})$. On sait que $v|_{F_p}^{v(F_p)}$ est un isomorphisme, donc en posant, $\boxed{\text{pour tout } j \in \mathbb{N}_{d_p}, e_j^{(p-1)} = v(e_j^{(p)})}$, la famille $(e_j^{(p-1)})_{1 \leq j \leq d_p}$ est une base de $v(F_p)$. On la complète en une base $(e_j^{(p-1)})_{1 \leq j \leq d_{p-1}}$ de F_{p-1} .

◇ Par récurrence, et par associativité de la notion de somme directe, on montre

$$\text{aisément que, pour tout } p \in \{0, \dots, i-1\}, E = \left(\bigoplus_{h=p}^{i-1} F_h \right) \oplus K_p.$$

En particulier, pour $p = 0$, sachant que $K_0 = \text{Ker}(v^0) = \{0\}$, on obtient $E = \bigoplus_{h=0}^{i-1} F_h$.

◇ On peut alors disposer les vecteurs $e_j^{(k)}$ en disposant ceux de F_{i-1} sur une première ligne, puis ceux de F_{i-2} sur la seconde ligne etc., ce qui donne la figure suivante.

