

## DM 58 : Caractérisation des comatrices.

Dans tout le problème,

$n$  désigne un entier au moins égal à 3 et  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On notera  ${}^tA$  la transposée de la matrice  $A$ .

On note  $c(A)$  la comatrice de  $A$ , c'est-à-dire la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont le  $(i, j)$ -ème coefficient est égal au  $(i, j)$ -ème cofacteur de la matrice  $A$ .

On se propose de déterminer  $\{c(A) / A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$ .

### Partie I : Rang d'une comatrice

1°) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , calculer  $c(\lambda A)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $c(A)$ .

2°) Si le rang de  $A$  est inférieur ou égal à  $n - 2$ , montrer que  $c(A) = 0$ .

3°) Si  $A$  est de rang  $n$ , montrer que  $c(A)$  est aussi de rang  $n$ .

4°) Lorsque  $A$  est de rang  $n$ , calculer  $c(c(A))$  en fonction de  $A$  et de  $\det(A)$ .

5°) Lorsque  $A$  est de rang  $n$ , montrer qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = c(B)$ .

6°) On suppose que  $A$  est de rang  $n - 1$ .

Montrer en détails qu'on peut extraire de  $A$  une matrice inversible de taille  $n - 1$ .

En déduire que  $c(A)$  est de rang 1.

### Partie II : Le polynôme caractéristique

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $\chi_A(z) = \det(A - zI_n)$ .

7°) Lorsque  $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ , on pose  $P(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k A^k$ .

Montrer que l'application  $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$  est un morphisme d'algèbres.

8°) Montrer que  $\chi_A$  est un polynôme de degré  $n$  dont les racines sont les valeurs propres de  $A$ . Montrer que si  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est semblable à  $A$ , alors  $\chi_A = \chi_B$ .

9°) Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $A_0, A_1, \dots, A_r$  sont  $r + 1$  matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On suppose que  $\left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{i=0}^r z^i A_i = 0 \right\}$  est de cardinal strictement plus grand que  $r$ .

Montrer que, pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ ,  $A_i = 0$ .

10°) Montrer qu'il existe une unique famille de matrices  $R_0, \dots, R_{n-1}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

telle que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  ${}^t c(A - zI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i R_i$ .

11°) Pour  $z \in \mathbb{C}$ , calculer  $(A - zI_n)^t c(A - zI_n)$  en fonction de  $\chi_A(z)$ .

En posant  $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ , en déduire, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , une expression de  $\lambda_k I_n$  en fonction de  $A$  et de  $R_0, \dots, R_{n-1}$ .

En déduire que  $\chi_A(A) = 0$  (théorème de Cayley-Hamilton) et que  $c(A) = P({}^t A)$ , où  $P$  est le polynôme défini par : pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P(z) = \frac{1}{z}(\chi_A(0) - \chi_A(z))$ .

12°) Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$  si et seulement si 0 est la seule valeur propre de  $A$ .

### Partie III : Les matrices de rang 1

13°) Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  que l'on suppose inversibles. Montrer que  $c(MN) = c(M)c(N)$ .

14°) Montrer que  $GL_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

15°) Pour tout  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , montrer que  $c(MN) = c(M)c(N)$ .

16°) Si  $M$  est un projecteur, que peut-on dire de  $c(M)$  ?

17°) On suppose que  $A$  est un projecteur de rang  $n - 1$ . Déterminer  $\chi_A$  puis montrer que  $c(A) = I_n - {}^t A$ .

18°) Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est un projecteur de rang 1, montrer qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M = c(N)$ .

19°) Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  que l'on suppose diagonalisable et de rang 1. Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda M$  est un projecteur. En déduire qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M = c(N)$ .

20°) On suppose que  $A$  est une matrice non diagonalisable de rang 1.

20.a) Montrer que  $A^2 = 0$  et que  $A$  est semblable à la matrice  $A_1$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de position  $(1, n)$  qui est égal à 1.

20.b) On pose  $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $D_1^2 - D_1$ ,  $D_1 A_1$  et  $A_1 D_1$ . Que vaut le rang de  $D_1$  ?

20.c) Montrer l'existence de  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de rang  $n - 1$  telle que :  $D^2 - D = A$ ,  $AD = DA = 0$  et  $I_n - D$  est de rang 2. Comparer  $D^3$  et  $D^2$ .

20.d) Montrer que  $\chi_D = X^2(1 - X)^{n-2}$  et en déduire  $c(D)$ . Montrer qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = c(N)$ .

21°) Déterminer  $\{c(A) / A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$ .