

## DM 58 : un corrigé

### Partie I : Rang d'une comatrice

1°) Soit  $i, j \in \mathbb{N}_n$ . Notons  $M$  la matrice déduite de  $A$  en lui enlevant sa  $i$ -ème ligne et sa  $j$ -ème colonne. Alors  $M$  est une matrice de taille  $n - 1$ ,

donc d'après le cours, le  $(i, j)$ -ème coefficient de  $c(\lambda A)$  vaut

$$[c(\lambda A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\lambda M) = \lambda^{n-1} (-1)^{i+j} \det(M) = \lambda^{n-1} [c(A)]_{i,j}.$$

Ceci montre que  $\boxed{c(\lambda A) = \lambda^{n-1} c(A)}$ .

2°) Raisonnons par l'absurde en supposant que  $c(A) \neq 0$ . Ainsi,  $A$  admet un cofacteur non nul, donc on peut extraire de  $A$  une matrice inversible de taille  $n - 1$ , mais  $rg(A)$  est plus grand que le rang de toute matrice extraite de  $A$ , donc  $rg(A) \geq n - 1$ , ce qui est faux. Ainsi,  $c(A) = 0$ .

3°) D'après le cours,  $A {}^t c(A) = \det(A) I_n$ , donc en prenant la transposée de cette égalité,  $c(A) {}^t A = \det(A) I_n$ , or  $A$  est supposée inversible, donc  $\det(A) \neq 0$ . Ainsi, l'égalité précédente montre que  $c(A)$  est inversible à gauche, donc est globalement inversible d'après le cours, d'inverse  $\frac{1}{\det(A)} {}^t A$ . Ainsi,  $\boxed{rg(c(A)) = n}$ .

4°) L'égalité précédente montre également que  ${}^t A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} c(A)$ ,

donc  $c(A) = \det(A) {}^t A^{-1}$ , pour toute matrice inversible  $A$ .

En remplaçant dans cette égalité  $A$  par  $c(A)$ , on obtient  $c(c(A)) = \det(c(A)) {}^t c(A)^{-1}$ , mais on a aussi  $\det(c(A)) = \det(\det(A) {}^t A^{-1}) = \det(A)^n \det(A^{-1}) = \det(A)^{n-1}$ ,

donc  $c(c(A)) = \det(A)^{n-1} (\det(A) {}^t A^{-1})^{-1}$ . Ainsi,  $\boxed{c(c(A)) = \det(A)^{n-2} A}$ .

5°) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . d'après la question 1,  $c(c(\lambda A)) = c(\lambda^{n-1} c(A)) = \lambda^{(n-1)^2} c(c(A))$ , donc d'après la question précédente,  $c(c(\lambda A)) = \lambda^{(n-1)^2} \det(A)^{n-2} A$ . Mais d'après le théorème de d'Alembert, le polynôme  $X^{(n-1)^2} - \det(A)^{2-n}$  possède au moins une racine (non nulle), donc il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\lambda^{(n-1)^2} = \det(A)^{2-n}$ . Alors, pour cette valeur de  $\lambda$ ,  $c(c(\lambda A)) = A$ , ce qui montre qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $c(B) = A$ .

6°)  $\diamond$  L'espace vectoriel engendré par les colonnes de  $A$  est de dimension  $n - 1$ , donc d'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire des colonnes de  $A$  une base de  $\text{Im}(A)$  de cardinal  $n - 1$  : il existe  $j_0 \in \mathbb{N}_n$  tel que les colonnes de la matrice extraite  $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \in \mathbb{N}_n \setminus \{j_0\}}}$  est une base de  $\text{Im}(A)$ . En particulier, cette dernière matrice est de rang  $n - 1$ . Ses  $n$  lignes engendrent donc un espace de dimension  $n - 1$ , donc il

existe  $i_0 \in \mathbb{N}_n$  telle que les lignes de la matrice extraite  $A' = (A_{i,j})_{\substack{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{i_0\} \\ j \in \mathbb{N}_n \setminus \{j_0\}}}$  engendrent ce même espace. La matrice  $A'$  est donc de rang  $n - 1$ , or elle est de taille  $n - 1$ , donc c'est une matrice extraite de  $A$  de rang  $n - 1$ .

◇ Avec les notations du point précédent, le cofacteur de  $A$  de position  $(i_0, j_0)$  est non nul, en tant que déterminant d'une matrice inversible, donc  $c(A) \neq 0$ .

◇  $A$  n'est pas inversible, donc  $A {}^t c(A) = \det(A)I_n = 0$ , donc  $\text{Im}({}^t c(A)) \subset \text{Ker}(A)$ .

Or d'après la formule du rang,  $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A) = 1$ ,

donc  $\text{rg}(c(A)) = \text{rg}({}^t c(A)) \leq 1$ . On a vu que  $c(A) \neq 0$ , donc  $\text{rg}(A) = 1$ .

## Partie II : Le polynôme caractéristique

7°) Notons  $\varphi$  l'application  $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$ .  $\varphi(1) = \varphi(X^0) = A^0 = I_n$ .

Soient  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ ,  $Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X^n \in \mathbb{C}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \diamond \varphi(\alpha P) &= \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) X^n \right) (A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) A^n \\ &= \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n A^n = \alpha \varphi(P). \end{aligned}$$

$$\diamond \varphi(P + Q) = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n + c_n) X^n \right) (A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n + c_n) A^n = \varphi(P) + \varphi(Q).$$

$$\diamond \varphi(PQ) = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k=0}^n (b_{n-k} c_k) \right) X^n \right) (A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k=0}^n (b_{n-k} c_k) \right) A^n. \text{ D'autre part, d'après}$$

les règles de calcul dans l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\varphi(P)\varphi(Q) = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n A^n \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n A^n \right) = \sum_{p,q \in \mathbb{N}} b_p c_q A^{p+q}, \text{ donc par sommation par pa-}$$

$$\text{quets, } \varphi(P)\varphi(Q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{p+q=n} b_p c_q \right) A^n. \text{ Ainsi, } \varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q).$$

En conclusion,  $\varphi$  est bien un morphisme d'algèbres.

8°) ◇ Soit  $t \in \mathbb{C}$ .  $\chi_A(t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (A_{j,\sigma(j)} - t\delta_{j,\sigma(j)})$ , donc en identifiant polynômes formels de  $\mathbb{C}[X]$  et applications polynomiales,  $\chi_A$  est bien un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ .

De plus, pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,  $\prod_{j=1}^n (A_{j,\sigma(j)} - X\delta_{j,\sigma(j)})$  est un polynôme de degré inférieur au cardinal de  $\{i \in \mathbb{N}_n / \sigma(i) = i\}$ , donc en particulier de degré strictement inférieur à  $n$  lorsque  $\sigma \neq \text{Id}_{\mathbb{N}_n}$ .

Ainsi, on peut mettre l'expression précédente de  $\chi_A$  sous la forme :

$$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^n (A_{j,j} - X) + Q(X) \text{ avec } \deg(Q) < n. \text{ Ceci prouve que } \chi_A \text{ est un polynôme}$$

de degré  $n$ , dont le coefficient dominant est égal à  $(-1)^n$ .

◇  $\chi_A(t) = 0 \iff A - tI_n \notin GL_n(\mathbb{C}) \iff [\exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, AX = tX] \iff t \in Sp(A)$ , donc les racines de  $\chi_A$  sont les valeurs propres de  $A$ .

◇ On suppose qu'il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice inversible telle que  $B = PAP^{-1}$ . Soit  $t \in \mathbb{C}$ . Alors  $\chi_B(t) = \det(B - tI_n) = \det(P(A - tI_n)P^{-1}) = \det(A - tI_n) = \chi_A(t)$ , car le déterminant est un invariant de similitude. Ainsi,  $\chi_A = \chi_B$ .

9°) Soit  $(j, k) \in \mathbb{N}_n^2$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ , notons  $A_{i,j,k}$  le  $(j, k)$ <sup>ème</sup> coefficient de  $A_i$ . Si  $\sum_{i=0}^r t^i A_i = 0$ , alors en prenant le  $(j, k)$ -ème coefficient,  $\sum_{i=0}^r t^i A_{i,j,k} = 0$ , donc

$\sum_{i=0}^r X^i A_{i,j,k}$  est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $r$  qui

possède strictement plus de  $r$  racines. Ce polynôme est donc identiquement nul. On en déduit que, pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ ,  $A_{i,j,k} = 0$ . Ainsi, pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ ,  $A_i = 0$ .

10°) ◇ **Unicité.** Supposons qu'il existe  $R_0, \dots, R_{n-1}$  et  $S_0, \dots, S_{n-1}$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{C}$ ,  ${}^t c(A - tI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i = \sum_{i=0}^{n-1} t^i S_i$ . Alors la quantité  $\sum_{i=0}^{n-1} t^i (R_i - S_i)$  s'annule pour tout complexe  $t$ , donc, d'après la question précédente, pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ ,  $R_i - S_i = 0$ . Ceci prouve l'unicité.

◇ **Lemme.** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}_p^2$ , soit  $t \mapsto m_{i,j}(t)$  un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 1.

Notons, pour tout  $t \in \mathbb{C}$ ,  $M(t) = (m_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{C}$ ,  $\det(M(t)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^p m_{j, \sigma(j)}(t)$ , donc  $t \mapsto \det(M(t))$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $p$ .

◇ Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ . Le  $(i, j)$ <sup>ème</sup> coefficient de la matrice  ${}^t c(A - tI_n)$  est égal au cofacteur de position  $(j, i)$  de la matrice  $A - tI_n$ . Il s'agit donc du déterminant (au signe près) d'une matrice d'ordre  $n - 1$  dont les coefficients sont des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 1. D'après le lemme, le  $(i, j)$ <sup>ème</sup> coefficient de la matrice  ${}^t c(A - tI_n)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ , que l'on notera

$$P_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,j,k} t^k.$$

Ainsi, en posant, pour tout  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ ,  $R_k = (p_{i,j,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

on obtient  ${}^t c(A - tI_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k R_k$ , ce qui prouve l'existence.

11°) D'après le cours,  $\boxed{(A - tI_n) {}^t c(A - tI_n) = \det(A - tI_n) I_n = \chi_A(t) I_n}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\chi_A(t)I_n &= (A - tI_n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k R_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t^k AR_k - \sum_{k=1}^n t^k R_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} t^k (AR_k - R_{k-1}) + AR_0 - t^n R_{n-1}.
\end{aligned}$$

Convenons de poser  $\boxed{R_{-1} = 0 = R_n}$ .

Alors, pour tout  $t \in \mathbb{C}$ ,  $\chi_A(t)I_n = \sum_{k=0}^n t^k (AR_k - R_{k-1})$ .

Ainsi, si l'on pose  $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ , on a montré que,

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^n t^k (\lambda_k I_n - AR_k + R_{k-1}) = 0.$$

Alors, d'après la question 9, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\boxed{\lambda_k I_n = AR_k - R_{k-1}}$ .

◇ Ainsi,  $\chi_A(A) = \sum_{k=0}^n \lambda_k A^k = \sum_{k=0}^n (A^{k+1} R_k - A^k R_{k-1})$ . Il s'agit d'une somme télescopique, donc  $\chi_A(A) = A^{n+1} R_n - R_{-1} = 0$ , ce qui prouve le théorème de Cayley-Hamilton.

◇  $\chi_A(0) = \lambda_0$ , donc  $P(X) = -\sum_{k=1}^n \lambda_k X^{k-1}$ . Ainsi,

$$P(A) = -\sum_{k=1}^n \lambda_k A^{k-1} = -\sum_{k=1}^n (A^k R_k - A^{k-1} R_{k-1}) = R_0.$$

Or  ${}^t c(A - tI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i$ , donc en remplaçant  $t$  par 0 dans cette égalité, on obtient

que  $R_0 = {}^t c(A)$ . On en déduit que  $c(A) = {}^t P(A) = -\sum_{k=1}^n \lambda_k {}^t (A^{k-1}) = P({}^t A)$ , car pour

tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  ${}^t (A^k) = ({}^t A)^k$ .

**12°)** Supposons que 0 est la seule valeur propre de  $A$ . Alors d'après la question 8,  $\chi_A$  est un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ , de coefficient dominant  $(-1)^n$ , admettant 0 comme seule racine. Ainsi,  $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$ . Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $A^n = (-1)^n \chi_A(A) = 0$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Il existe  $X \in \mathbb{C}^n$  tel que  $X \neq 0$  et  $AX = \lambda X$ . Par récurrence, on montre alors que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k X = \lambda^k X$ , donc en particulier,  $\lambda^p X = A^p X = 0$ . Or  $X \neq 0$ , donc  $\lambda^p = 0$ , donc  $\lambda = 0$ .

### Partie III : Les matrices de rang 1

**13°)** D'après la question 3, lorsque  $A$  est inversible,  $c(A) = \det(A) ({}^tA)^{-1}$ . Or  $MN$  est inversible, donc  $c(MN) = \det(MN)({}^t(MN))^{-1}$ , mais  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$  et  $({}^t(MN))^{-1} = ({}^tN{}^tM)^{-1} = ({}^tM)^{-1}({}^tN)^{-1}$ , donc  $c(MN) = \det(M)\det(N){}^tM^{-1}{}^tN^{-1} = c(M)c(N)$ .

**14°)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Le spectre de  $A$  est fini, car c'est l'ensemble des racines de  $\chi_A$  qui est de degré  $n$ , donc  $\{\frac{1}{k} / k \in \mathbb{N}^*\} \cap Sp(A)$  est fini. Ainsi, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $k \geq N$ ,  $\frac{1}{k} \notin Sp(A)$ . Alors  $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k \geq N}$  est une suite de matrices inversibles qui tend vers  $A$ , ce qui conclut.

**15°)** Soit  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . D'après la question précédente, il existe deux suites  $(M_p)$  et  $(N_p)$  de matrices inversibles qui tendent respectivement vers  $M$  et  $N$ .

L'application  $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{matrix}$  est bilinéaire en dimension finie, donc elle est continue. Ainsi,  $\begin{matrix} M_p N_p & \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} & MN \end{matrix}$ .

◇ Les coefficients de  $c(A)$  sont des fonctions polynômiales des coefficients de  $A$ , donc l'application  $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & c(A) \end{matrix}$  est continue. Ainsi,  $\begin{matrix} c(M_p) & \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} & c(M), \\ c(N_p) & \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} & c(N) \end{matrix}$  et  $\begin{matrix} c(M_p N_p) & \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} & c(MN) \end{matrix}$ . Mais d'après la question 13, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $c(M_p N_p) = c(M_p)c(N_p)$ , donc en faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , on obtient, toujours grâce à la continuité du produit matriciel, que  $c(MN) = c(M)c(N)$ .

**16°)** Supposons que  $M$  est un projecteur.

Alors  $c(M)^2 = c(M^2) = c(M)$ , donc  $c(M)$  est aussi un projecteur.

**17°)** ◇  $A$  étant un projecteur, on sait que  $\text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A) = \mathbb{C}^n$ .

De plus,  $\dim(\text{Im}(A)) = n - 1$ . Ainsi il existe une base  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  de  $\text{Im}(A)$  et  $e_n$  un vecteur non nul de  $\text{Ker}(A)$ . Alors d'après le cours,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ . Notons  $\tilde{A}$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et  $0_{p,q}$  la matrice nulle de

$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ . Alors  $\text{mat}(\tilde{A}, e) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 0 \end{pmatrix}$ , donc  $\chi_A(t) = (1-t)^{n-1}(-t)$ , en tant

que déterminant d'une matrice diagonale. Ainsi,  $\boxed{\chi_A(t) = -t(1-t)^{n-1}}$ .

◇ Si l'on reprend les notations de la question 11,  $P(t) = (1-t)^{n-1}$ , donc d'après les questions 7 et 11,  $c(A) = P({}^tA) = (I_n - {}^tA)^{n-1}$ , mais  $A^2 = A$ , donc  $({}^tA)^2 = {}^tA$ . Ainsi,  ${}^tA$  est un projecteur. Alors  $I_n - {}^tA$  est le projecteur associé à  ${}^tA$ , donc  $(I_n - {}^tA)^2 = I_n - {}^tA$ . On en déduit que  $\boxed{c(A) = I_n - {}^tA}$ .

**18°)** Posons  $A = I_n - {}^tM$ . Dans une base adaptée à la décomposition

$\mathbb{C}^n = \text{Im}(M) \oplus \text{Ker}(M)$ , la matrice de  $M$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ , donc la matrice de

$A$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$ . Ainsi  $A$  est un projecteur de rang  $n - 1$  et on peut appliquer

les questions précédentes. En particulier,  $c(A) = I_n - {}^tA = M$ , ce qui conclut.

**19°)**  $\diamond$   $M$  étant diagonalisable, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M = PDP^{-1}$ .  $D$  étant diagonale, son rang est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls (c'est bien alors la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de  $D$ ), donc tous les coefficients de  $D$  sont nuls, sauf l'un des coefficients diagonaux, égal à  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Alors  $\frac{1}{\lambda}D$  est une matrice de projecteur, donc

$\left(\frac{1}{\lambda}M\right)^2 = \frac{1}{\lambda}M$ , ce qui prouve que  $\frac{1}{\lambda}M$  est un projecteur, que l'on notera  $p$ . Le rang de  $p$  est égal au rang de  $M$ , donc  $p$  est un projecteur de rang 1.

$\diamond$  D'après la question précédente, il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $c(A) = p$ .

D'après la question 1, pour tout  $\mu \in \mathbb{C}^*$ ,  $c(\mu A) = \mu^{n-1}c(A)$ .

On peut choisir  $\mu$  tel que  $\mu^{n-1} = \lambda$ , et dans ce cas,  $c(\mu A) = \lambda p = M$ , ce qui conclut.

**20.a°)**  $\diamond$   $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 1$ . Notons  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $\text{Ker}(A)$ , que l'on complète en une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$ . Dans cette base, la matrice de  $A$  est de

$$\text{la forme } M = \begin{pmatrix} & \lambda_1 & & \\ 0_{n,n-1} & \vdots & & \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix}.$$

Supposons que  $\lambda_n \neq 0$ . D'après la question 8,  $\chi_A = \chi_M = (\lambda_n - X)(-X)^{n-1}$ , donc  $\lambda_n$  est une valeur propre non nulle de  $A$ . On sait que deux sous-espaces propres forment une somme directe, donc  $\dim(\text{Ker}(A) \oplus \text{Ker}(A - \lambda_n I_n)) \geq (n - 1) + 1 = n$ . On en déduit que  $A$  est diagonalisable, ce qui est faux. Ainsi,  $\lambda_n = 0$ , ce qui signifie que  $A(e_n) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \text{Ker}(A)$ . On en déduit que  $A^2(e_n) = 0$ . Ainsi  $A^2$  annule tous les vecteurs de  $e$ , ce qui prouve que  $A^2 = 0$ .

$\diamond$  Posons  $e'_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i$ .  $e'_1 \neq 0$  car  $A \neq 0$ , donc on peut compléter  $(e'_1)$  en une base de

$\text{Ker}(A)$  notée  $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ . Dans la base  $(e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n)$ , la matrice de  $A$  est égale à  $A_1$ , car  $u(e_n) = e'_1$ . Ainsi,  $A$  et  $A_1$  représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc elles sont semblables.

**20.b°)**  $\diamond$  Notons  $b = (b_1, \dots, b_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  et  $u_1$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  dont la matrice dans la base  $b$  est égale à  $D_1$ .

$u_1(b_1) = 0$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ ,  $u_1(b_i) = b_i$  et  $u_1(b_n) = -b_1$ .

On en déduit que  $u_1^2(b_1) = 0$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ ,  $u_1^2(b_i) = b_i$  et que  $u_1^2(b_n) = 0$ .

$$\text{Ainsi, } D_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{D_1^2 - D_1 = A_1}.$$

$\diamond$  On vérifie que  $u_1^3(b_1) = 0$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ ,  $u_1^3(b_i) = b_i$  et que  $u_1^3(b_n) = 0$ , donc  $D_1^3 = D_1^2$ , puis  $D_1 A_1 = D_1(D_1^2 - D_1) = D_1^3 - D_1^2 = 0$  et de même,  $A_1 D_1 = 0$ , donc  $\boxed{D_1 A_1 = A_1 D_1 = 0}$ .

$\diamond$  Les  $n - 1$  premières lignes de  $D_1$  sont indépendantes et la dernière est nulle, donc  $\boxed{rg(D_1) = n - 1}$ .

**20.c°)**  $\diamond$  Il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = QA_1Q^{-1}$ . Posons  $\boxed{D = QD_1Q^{-1}}$ . On déduit des formules de la question précédente que  $D^2 - D = A$  et  $AD = DA = 0$ .

$$\diamond I_n - D = Q(I_n - D_1)Q^{-1}, \text{ donc } \text{rg}(I_n - D) = \text{rg}(I_n - D_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

or cette matrice ne présente que deux colonnes non nulles, qui sont indépendantes, donc  $\boxed{\text{rg}(I_n - D) = 2}$ .

$\diamond$  On a vu que  $D_1^3 = D_1^2$ , donc  $\boxed{D^3 = D^2}$ .

**20.d°)**  $\diamond$  D'après la question 8,  $\chi_D = \chi_{D_1} = X^2(1 - X)^{n-2}$ , donc avec les notations de la question 11,  $P = -X(1 - X)^{n-2}$ . On en déduit que

$$c(D) = P({}^tD) = -{}^tD(I_n - {}^tD)^{n-2} = -{}^t((I_n - D)^{n-2}D) = -{}^t(Q(I_n - D_1)^{n-2}D_1Q^{-1}).$$

Notons  $v$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $I_n - D_1$ . Ainsi,  $v(b_1) = b_1$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $v(b_i) = 0$  et  $v(b_n) = b_1 + b_n$ . On en déduit par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $v^k(b_1) = b_1$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $v^k(b_i) = 0$  et  $v^k(b_n) = kb_1 + b_n$ .

$$\text{Ainsi, } (I_n - D_1)^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (n-2)A_1 + (I_n - D_1^2).$$

On en déduit que  $(I_n - D_1)^{n-2}D_1 = D_1 - D_1^3 = D_1 - D_1^2 = -A_1$ , donc  $\boxed{c(D) = {}^tA}$ .

$\diamond$  Vérifions que  $c({}^tD) = {}^tc(D)$  : soit  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ . Le coefficient de position  $(i, j)$  de  $c({}^tD)$  est égal au cofacteur de position  $(i, j)$  de  ${}^tD$ , c'est-à-dire à  $(-1)^{i+j} \det(({}^tD)_{h,k})_{\substack{h \neq i \\ k \neq j}} = (-1)^{i+j} \det((D_{k,h})_{\substack{h \neq i \\ k \neq j}}) = [c(D)]_{j,i}$ , ce qui conclut.

Alors  $c({}^tD) = A$ , ce qu'il fallait démontrer.

**21°)** On dira que  $A$  est une comatrice si et seulement si  $A \in \{c(B) / B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$ .

Si  $A$  est une comatrice, d'après la partie I, son rang vaut 0, 1 ou  $n$ . Réciproquement, si  $A$  est une matrice de rang 0, c'est la comatrice de la matrice nulle, si  $\text{rg}(A) = 1$ , c'est une comatrice d'après les questions 19 et 20, et si  $A$  est inversible, c'est une comatrice d'après la question 5.

En conclusion,  $\{c(A) / A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$  est l'ensemble des matrices de rang 0, 1 ou  $n$ .