

Feuille d'exercices 25.

Espaces euclidiens

Exercice 25.1 : (niveau 1)

Déterminer la matrice dans la base canonique de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

Exercice 25.2 : (niveau 1)

On pose $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que M est une projection orthogonale sur un espace vectoriel à déterminer.

Exercice 25.3 : (niveau 1)

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E .

Montrer que $\text{Im}(f) = (\text{Ker}(f))^\perp$.

Exercice 25.4 : (niveau 1)

Soit $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Quelle transformation de \mathbb{R}^3 représente A ?

Exercice 25.5 : (niveau 1)

Soit E un espace euclidien. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On suppose que f est un endomorphisme de E tel que pour tout $u, v \in E$,

$\langle u, v \rangle = 0 \implies \langle f(u), f(v) \rangle = 0$.

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$.

1°) Montrer que $e_i - e_j$ et $e_i + e_j$ sont orthogonaux.

2°) Montrer que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

3°) Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| = \lambda\|u\|$.

Exercice 25.6 : (niveau 1)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On note φ l'application de E^2 dans \mathbb{R} définie par $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

1°) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

2°) Soit A l'ensemble des fonctions positives de E . Montrer que $A^\perp = \{0\}$.

Exercice 25.7 : (niveau 2)

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $rg(A) = rg({}^tAA)$.

Exercice 25.8 : (niveau 2)

On note E l'espace des applications continues de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} et ϕ définie sur $E \times E$ par

$$\forall (f, g) \in E^2, \phi(f, g) = \int_{-1}^1 |x|f(x)g(x)dx.$$

1°) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .

2°) On pose $e_1 : x \mapsto 1$, $e_2 : x \mapsto \cos(\pi x)$ et $e_3 : x \mapsto \sin(\pi x)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle libre ? orthonormale ? Orthonormaliser cette famille selon le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 25.9 : (niveau 2)

Soient E un espace euclidien et f et g deux endomorphismes symétriques sur E , dont les spectres sont notés $Sp(f)$ et $Sp(g)$.

1°) Si x est un vecteur unitaire de E , montrer que $\langle x, f(x) \rangle \geq \min(Sp(f))$.

2°) Montrer que $\min(Sp(f + g)) \geq \min(Sp(f)) + \min(Sp(g))$.

Exercice 25.10 : (niveau 2)

1°) Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

2°) Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln x - ax - b)^2 dx$.

Exercice 25.11 : (niveau 2)

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice orthogonale d'ordre n .

1°) Montrer que $n \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$.

2°) En utilisant le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont égales à 1, montrer que $|\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}| \leq n$.

Exercice 25.12 : (niveau 2)

1°) Si A est une matrice antisymétrique réelle, montrer que les valeurs propres de A sont de la forme ix avec x réel.

2°) Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est une bijection de l'espace $A_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles antisymétriques de taille n sur l'espace Z des éléments de $O_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 et qui n'admettent pas -1 pour valeur propre.

Exercice 25.13 : (niveau 2)

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit a_0, \dots, a_n $n + 1$ réels deux à deux distincts.

Pour P, Q dans E , on définit : $(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

1°) Montrer que c'est un produit scalaire.

2°) Construire une base orthonormée de E .

3°) Calculer la distance de Q à $H = \{P \in E / \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.

Exercice 25.14 : (niveau 2)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont le spectre est inclus dans \mathbb{R}_+^* .

1°) Montrer qu'il existe une matrice $R(A)$ symétrique, dont le spectre est inclus dans \mathbb{R}_+^* , et telle que $R(A)^2 = A$.

2°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier les suites vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\lambda}{u_n}\right), \text{ avec } u_0 > 0.$$

3°) On considère la suite matricielle définie par les relations suivantes : $X_0 = I_p$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + AX_n^{-1})$. Montrer que cette suite est définie correctement et qu'elle converge vers $R(A)$.

Exercice 25.15 : (niveau 2)

Soient n et m deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq n$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On pose $E = \{\|AX - B\|^2 / X \in \mathbb{R}^n\}$.

1°) Montrer que E possède un minimum.

2°) On note (S) le système linéaire $AX = B$ et on appelle pseudo-solution de (S) tout élément Y de \mathbb{R}^n tel que $\|AY - B\|^2 = \min(E)$.

Lorsque (S) admet des solutions, quelles sont les pseudo-solutions de (S) ?

3°) On note (S') le système linéaire ${}^t AAX = {}^t AB$.

Démontrer que Y est pseudo-solution de (S) si et seulement si Y est une solution de (S') .

4°) a) Démontrer que $rg(A) = rg({}^t AA)$.

b) Déterminer alors une condition nécessaire et suffisante pour que (S) admette une et une seule pseudo-solution.

5°) Déterminer les pseudo-solutions du système
$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma & = 1 \\ \alpha + \beta + 2\gamma & = 1 \\ \alpha + \gamma & = 1 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma & = 0 \end{cases}.$$

Exercice 25.16 : (niveau 2)

E désigne l'ensemble des applications continues de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$.

1°) Montrer que E muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace préhilbertien.

2°) On note $F = \{f \in E / f|_{[0,1]} = 0\}$. Déterminer F^\perp .

3°) Déterminer $F + F^\perp$.

Exercice 25.17 : (niveau 3)

Soit E un espace euclidien et $p \in L(E)$.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^2 = p$ et pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 25.18 : (niveau 3)

1°) Soit $M, M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On suppose que M et M' sont deux matrices de rotation de même angle.

Montrer qu'il existe une troisième matrice de rotation R telle que $M = RM'R^{-1}$.

2°) Quels sont les morphismes de groupes de $SO(3)$ dans \mathbb{C}^* ?

Exercice 25.19 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels que l'on suppose symétrique et à valeurs propres positives.

$$\text{Montrer que } \text{Tr}(A) \geq n \sqrt[n]{\det(A)}.$$

2°) Montrer ce même résultat si l'on suppose maintenant que $A = A_1 A_2$ où A_1 et A_2 sont deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, que l'on suppose symétriques et à valeurs propres positives.

Exercice 25.20 : (niveau 3)**Matrices de Householder et décomposition QR**

On fixe $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Pour $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vu comme un vecteur colonne, on note $H(v) = I_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} v^t v$.

1°) Interpréter géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $H(v)$.

2°) Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $(a_2, \dots, a_n) \neq 0$.

Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $H(v)(a)$ a toutes ses composantes nulles sauf la première, qui est dans \mathbb{R}_+^* .

3°) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs ou nuls telles que $A = QR$.

Lorsque A est inversible, montrer que le couple (Q, R) vérifiant les propriétés précédentes est unique.

Exercice 25.21 : (niveau 3)

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

f est une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R}_+^* .

Posons, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b f(t)P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2°) Montrer qu'il existe une unique famille orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} \deg(P_n) = n \\ \text{et } \langle P_n, X^n \rangle > 0. \end{array} \right.$$

3°) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P_n(\alpha) = 0$.

Montrer qu'il existe un polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ unitaire et irréductible de degré 2 et un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $P_n = TP$.

En déduire que toutes les racines de P_n sont réelles.

b) Montrer que toutes les racines de P_n sont simples et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]a, b[$.

4°) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $aP_{n+2} + XP_{n+1} + bP_{n+1} + cP_n = 0$.

Exercices supplémentaires

Exercice 25.22 : (niveau 1)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $Oxyz$.

Soit P le plan d'équation $x + 2y + z = 0$ et D la droite d'équations $\begin{cases} 0 & = 3x - y + z \\ 0 & = x + y - z \end{cases}$.

Déterminer l'image de D par la réflexion selon le plan P .

Exercice 25.23 : (niveau 1)

On travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $\phi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$ ainsi que l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1°) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

2°) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3°) Exprimer une base de F^\perp .

Exercice 25.24 : (niveau 1)

Soit E un espace euclidien orienté et soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ une base de E .

Notons $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base déduite de x par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Montrez que si x est directe, e est directe.

Exercice 25.25 : (niveau 1)

Soit (i, j, k) une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Déterminez la matrice de la rotation r vérifiant $r(i) = -j$ et $r(u) = u$ où $u = i - j + k$. Précisez son axe et son angle.

Exercice 25.26 : (niveau 1)

Nature géométrique de l'endomorphisme de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , canoniquement associé à la matrice

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.27 : (niveau 1)

On munit \mathbb{R}^4 de son produit scalaire canonique et on note $e = (e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sa base canonique. Posons $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$.

Donner la matrice dans la base e de la projection orthogonale sur F .

Exercice 25.28 : (niveau 1)

x_1, \dots, x_n sont n réels tels que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Notons $A = (x_i x_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$.

1°) Montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale que l'on précisera.

2°) Montrer que $2A - I_n$ est une matrice orthogonale.

Exercice 25.29 : (niveau 1)

Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ et c_1, \dots, c_n $3n$ réels strictement positifs.

Montrer que $(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2 c_k)(\sum_{k=1}^n b_k^2 c_k)$.

Exercice 25.30 : (niveau 1)

Soit E un espace euclidien et (e_1, \dots, e_n) un système de n vecteurs de E , unitaires et

vérifiant : $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E et que $\dim(E) = n$.

Exercice 25.31 : (niveau 1)

Soient E un espace préhilbertien réel et $x : \mathbb{R} \rightarrow E$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|x(t)\| = 1$.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ et $x'(t)$ sont orthogonaux.

Exercice 25.32 : (niveau 1)

E est un espace préhilbertien réel, d et δ sont deux réels tels que $0 < \delta \leq d$, et A est une partie convexe et non vide de E .

On suppose que A est incluse dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $d + \delta$ et que son intersection avec la boule fermée de centre 0 et de rayon d est vide.

Montrer que $\sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$ est inférieur ou égal à $2\sqrt{3\delta d}$.

Exercice 25.33 : (niveau 1)

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . E est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

1°) a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.

b) Donner un exemple d'espace vectoriel normé E et un choix de vecteurs non nuls x et y dans E tels que l'inégalité précédente est une égalité.

2°) On suppose maintenant que E est un espace préhilbertien muni de sa norme euclidienne ou hermitienne.

a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, montrer que $\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$

b) L'inégalité précédente est-elle encore valable si l'on remplace $\sqrt{2}$ par un réel plus petit ?

Exercice 25.34 : (niveau 1)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé.

La norme d'un vecteur x de E sera notée $\|x\|$.

On suppose que la norme de E vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On souhaite montrer que la norme de E est une norme euclidienne, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire f sur E tel que, pour tout $x \in E$,

$\|x\| = \sqrt{f(x, x)}$. On aura ainsi prouvé qu'une norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel vérifie l'identité du parallélogramme si et seulement si c'est une norme euclidienne.

-
- 1°) Notons $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.
- ◇ Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $f(x + y, z) + f(x - y, z) = 2f(x, z)$.
- ◇ En déduire que, pour tout $(x, z) \in E^2$, $f(2x, z) = 2f(x, z)$.
- 2°) Montrer que, pour tout $(u, v, z) \in E^3$, $f(u, z) + f(v, z) = f(u + v, z)$.
- 3°) Achever la résolution de l'exercice.

Exercice 25.35 : (niveau 2)

On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$. Lorsque $P, Q \in E$, avec $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$,

on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i$.

On définit $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$.

1°) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E et trouver une base orthonormée de E .

2°) On introduit la famille $B' = (e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, définie par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, e_i = X^i - X^{i-1}.$$

a) Montrer que B' est une base de H et calculer pour tout (i, j) chacun des $\langle e_i, e_j \rangle$.

b) Trouver une base orthonormée de H à partir de B' en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 25.36 : (niveau 2)

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $f \in L(E)$ tel que $M = \text{mat}(f, B) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que f est une rotation vectorielle si et seulement si $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ac = 0$.

2°) Montrer que cette condition est équivalente à : il existe $p \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont solutions de $x^3 - x^2 + p = 0$.

3°) On suppose que f est une rotation et que $b = c \neq 0$.

Déterminer les éléments caractéristiques de f .

Exercice 25.37 : (niveau 2)

E désigne un espace euclidien et p est un projecteur de E .

1°) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

2°) Si p et q sont deux projecteurs orthogonaux, montrer qu'ils commutent si et seulement si $p \circ q$ est un projecteur.

Exercice 25.38 : (niveau 2)

$A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices antisymétriques et celui des matrices symétriques réelles. On introduit le produit scalaire tel que pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M|N \rangle = \text{tr}({}^tMN)$.

1°) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Soit la matrice M où pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $M_{i,j} = i$. Déterminer la distance de M à $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 25.39 : (niveau 2)

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F + F^\perp$. Montrer que F est fermé dans E .

Exercice 25.40 : (niveau 2)

Soit A un ensemble fini de cardinal n et R une relation d'équivalence sur A . On note k le nombre de classes d'équivalence de R et m le cardinal du graphe de R .

Montrez que $n^2 \leq km$. Cas d'égalité.

Exercice 25.41 : (niveau 2)

Soient E un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1°) Montrer que $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2$.

2°) On suppose que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, $(i \neq j) \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq 2$.

Soit $x \in E$.

On note B la boule fermée de centre x et de rayon R : $B = \{y \in E / \|x - y\| \leq R\}$.

On suppose que B contient x_1, \dots, x_n .

Montrer que $R \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}$.

Exercice 25.42 : (niveau 2)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tAA = I_n$. Que peut-on dire de A ?

Exercice 25.43 : (niveau 2)

Soient $A, B \in O(3, \mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A) = \det(B) = 1$.

Que peut-on dire au sujet de la nature des endomorphismes de \mathbb{R}^3 associés à A et B ?

Exercice 25.44 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ étant orthonormale.

1°) Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$. Calculer la distance euclidienne de e_1 à H .

2°) Soit $H' = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k = 0\}$. Calculer la distance euclidienne de e_1 à H' .

3°) Soit $F = H \cap H'$. Préciser la dimension de F et calculer la distance euclidienne de e_1 à F .

Exercice 25.45 : (niveau 3)

Soit E un espace préhilbertien réel.

Montrer que $\{(x, y) \in E^2 / (x, y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2 .

Exercice 25.46 : (niveau 3)

Soient E un espace euclidien et α un réel non nul.

On appelle inversion de puissance α l'application i_α , de $E \setminus \{0\}$ dans $E \setminus \{0\}$, définie par

$$i_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\|x\|^2}x.$$

1°) Montrer que $i_\alpha \circ i_\alpha = Id_{E \setminus \{0\}}$.

2°) Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On note S la sphère de centre a passant par 0.

Montrer que $i_\alpha(S \setminus \{0\})$ est un hyperplan affine orthogonal à a ne passant pas par 0. Réciproquement, étudier l'image par i_α d'un hyperplan affine ne passant pas par 0.

3°) Soit S une sphère de rayon r et de centre a , ne passant pas par 0.

a) Montrer que si $\alpha = \|a\|^2 - r^2$, $i_\alpha(S) = S$.

b) Déterminer $i_\alpha(S)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 25.47 : (niveau 3)

Soient E un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E .

1°) On pose $v = u - Id_E$. Montrer que $Ker(v) = Im(v)^\perp$.

2°) Soit $x \in E$. On note y la projection orthogonale de x sur $Ker(v)$.

Montrer que y est la limite de $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 25.48 : (niveau 3)

Etude des **polynômes de Legendre**.

Posons, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrez qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $Q_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(t^2 - 1)^n]}{dt^n}$.

Calculez le degré du polynôme Q_n .

Calculez $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

3°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrez que Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à n .

b) Calculez la norme de Q_n .

4°) a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)Q_{n+2} = (2n+3)XQ_{n+1} - (n+1)Q_n$.

b) Montrez que, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}((1-t^2)Q'_n(t)) + n(n+1)Q_n = 0$.

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrez que toutes les racines de Q_n sont simples et qu'elles sont incluses dans $] -1, 1[$.
Indication. On pourra raisonner par récurrence, en utilisant le théorème de Rolle.

Exercice 25.49 : (niveau 3)

Soit E un espace euclidien dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera noté $\langle x, y \rangle$.

Considérons deux familles de vecteurs $(y_k)_{1 \leq k \leq p}$ et $(z_k)_{1 \leq k \leq p}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2 \quad \langle y_i, y_j \rangle = \langle z_i, z_j \rangle .$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal f sur E tel que : $\forall k \in \mathbb{N}_p \quad f(y_k) = z_k$.

1°) Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq p} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\sum_{k=1}^p a_k y_k = 0$ si et seulement si $\sum_{k=1}^p a_k z_k = 0$.

2°) Résoudre l'exercice dans le cas où (y_1, \dots, y_p) est libre.

3°) Résoudre l'exercice dans le cas général.

Exercice 25.50 : (niveau 3)

Soit E un espace euclidien de dimension $n > 0$.

1°) Si x et y sont deux vecteurs non nuls de E , on note $\widehat{(x, y)} = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$.

Montrer que $\widehat{(x, y)}$ est une quantité correctement définie.

2°) Si $p \in \mathbb{N}^*$, une famille de p vecteurs de $E \setminus \{0\}$, (x_1, \dots, x_p) est dite obtusangle si et seulement si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2 \quad (i \neq j \Rightarrow \widehat{(x_i, x_j)} \in]\frac{\pi}{2}, \pi])$.

Par récurrence sur n , montrer qu'une famille obtusangle peut avoir $n+1$ éléments mais pas davantage.

3°) Soit (x_1, \dots, x_p) une famille obtusangle dans laquelle, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ avec $i \neq j$, $\widehat{(x_i, x_j)} = \varphi$ (φ ne dépend ni de i ni de j).

Vérifier que $1 + (p-1) \cos \varphi \geq 0$, avec égalité si $p = n+1$.

Exercice 25.51 : (niveau 3)

On note E l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $(f, g) \in E^2$, on note $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$.

Soit $c \in]0, 1[$. On pose $H = \{f \in E / \int_0^c f = 0\}$.

1°) Montrer que H est fermé.

2°) Calculer H^\perp .