

Résumé de cours :
Semaine 32, du 1 juin au 5 juin.

Espaces euclidiens (suite)

1 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2 \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$,
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Il faut savoir le démontrer.

Inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
avec égalité ssi x et y sont positivement colinéaires, i.e $y = 0$ ou il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = ky$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. La norme associée au produit scalaire d'un espace préhilbertien est bien une norme.

2 Orthogonalité

Notation. E est un espace préhilbertien. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.1 Orthogonalité en dimension quelconque

Définition. Soit $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux ssi $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Définition. Si $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A \quad x \perp y\}$: l'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A .

Exemple. Si $a \in E \setminus \{0\}$, a^\perp est un hyperplan.

Propriété. Soit A une partie de E . Alors A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Définition. Soient A et B deux parties de E . On dit qu'elles sont orthogonales si et seulement si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B : $A \perp B \iff [\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \perp b]$.

Propriété. Soient A et B deux parties de E . $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$.

Propriété. $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$, $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ et $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
mais en général, $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$ et $F^{\perp\perp} \neq F$.

Propriété. $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Définition. $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est orthogonale si et seulement si : $\forall (i, j) \in I^2, \quad (i \neq j \implies x_i \perp x_j)$.
Elle est orthonormale si et seulement si : $\forall (i, j) \in I^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i, j}$.

Relation de Pythagore : Si (x_1, \dots, x_n) une famille orthogonale de vecteurs de E ,

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \text{ Lorsque } n \geq 3, \text{ la réciproque est fautive.}$$

Propriété. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.
En particulier, une famille orthonormale est toujours libre.

Propriété. Supposons que E admet une base orthonormée notée $(e_i)_{i \in I}$.

Si $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i \in I} \beta_i e_i \in E$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i, \|x\|^2 = \sum_{i \in I} \alpha_i^2 \text{ et } x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i.$$

Propriété. Supposons que E est muni d'une base $e = (e_i)_{i \in I}$.

Alors il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel e est une base orthonormée.

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Alors ils forment une somme directe que l'on note $E_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_n = \overset{\perp}{\oplus}_{1 \leq i \leq n} E_i$.

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

G est un **supplémentaire orthogonal** de F si et seulement si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E . F admet au plus un supplémentaire orthogonal.

Il s'agit de F^\perp . Il est cependant possible que $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \neq E$.

Il faut savoir le démontrer.

2.2 En dimension finie

Propriété. Si E est de dimension finie, l'application $\begin{matrix} E & \longrightarrow & L(E, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \langle x, \cdot \rangle \end{matrix}$ est un isomorphisme.

Théorème. On ne suppose pas que E est de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors F^\perp est l'unique supplémentaire orthogonal de F . De plus $F = (F^\perp)^\perp$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

Hypothèse : jusqu'à la fin du paragraphe, E est supposé euclidien de dimension $n > 0$.

Propriété. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Propriété. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$.

Propriété. Soit e une base orthonormée de E . Soient $x, y \in E$ dont les coordonnées dans la base e sont données sous forme de vecteurs colonnes notés X et Y . Alors $\langle x, y \rangle = {}^t Y X = {}^t X Y$.

Remarque. Si e est une base orthonormée de E , pour tout $u \in L(E)$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $[\text{mat}(u, e)]_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.

La fin de ce paragraphe est hors programme.

Définition. La matrice du produit scalaire dans la base e est égale à

$$\text{mat}(\langle \cdot, \cdot \rangle, e) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Propriété. e est orthogonale si et seulement si $\text{mat}(\langle \cdot, \cdot \rangle, e)$ est diagonale.

e est orthonormée si et seulement si $\text{mat}(\langle \cdot, \cdot \rangle, e) = I_n$.

Formule. Soit e une base quelconque de E . On note Ω la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base e . Soient x et y deux vecteurs de E , dont les coordonnées dans e sont données sous la forme des vecteurs colonnes X et Y de \mathbb{R}^n . Alors

$$\langle x, y \rangle = {}^t X \Omega Y = {}^t Y \Omega X = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_i y_j \omega_{i,j}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base

$e = (e_1, \dots, e_n)$ et soit φ une forme bilinéaire sur E .

La matrice de φ dans la base e est $\text{mat}(\varphi, e) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $x, y \in E$, en posant $X = \text{mat}_e(x)$ et $Y = \text{mat}_e(y)$, $\varphi(x, y) = {}^t X \Omega Y$.

φ est symétrique si et seulement si $\Omega \in S_n(\mathbb{K})$.

3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$. La **projection orthogonale** sur F est la projection sur F parallèlement à F^\perp . Dans ce chapitre, elle est notée p_F .

Remarque. Pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$.

Formule. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , muni d'une base orthonormée

$e = (e_1, \dots, e_n)$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i.$$

Il faut savoir le démontrer.

Théorème de la projection orthogonale :

Soient $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors, $d(a, F) = d(a, p_F(a))$.

Pour tout $y \in F \setminus \{p_F(a)\}$, $d(a, y) > d(a, F)$. $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2$.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base **orthonormée** de F , $\|a\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \langle e_i, a \rangle^2$: inégalité de Bessel.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On pose $H = a^\perp$. H est un hyperplan dont a est un vecteur **normal**.

Pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$ et, en notant s_H la symétrie orthogonale par rapport à H ,

$$s_H(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

Propriété. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E , passant par un point A et dirigé par l'hyperplan vectoriel H : Si \vec{n} est un vecteur non nul de H^\perp , on dit que

\vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{H} . Dans ce cas, pour tout $M \in E$ $d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\langle \vec{n}, \overrightarrow{AM} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$.

Si \mathcal{H} a pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = c$ dans un repère orthonormé, pour tout $M \in E$,

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}}, \text{ où } (x_1, \dots, x_n) \text{ sont les coordonnées de } M \text{ dans le repère.}$$

Il faut savoir le démontrer.

4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème. Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ une famille **libre** de vecteurs de E . Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

- i) $e_k \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
- ii) et $\langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ est définie par $e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, x_k \rangle e_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ une base de E .

Alors il existe une unique base orthonormée $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de passage de e vers x est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux étant de plus strictement positifs.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si E est euclidien, il admet au moins une base orthonormée.

Toute une famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E .

Théorème. Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille infinie

Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille **libre** de vecteurs de E . Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- i) $e_k \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
- ii) et $\langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est définie par : $e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, x_k \rangle e_i$.

5 Les endomorphismes symétriques

Définition. $u \in L(E)$ est symétrique ssi $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Propriété. Soient e une base **orthonormée** de E et $u \in L(E)$.

Alors u est symétrique si et seulement si $\text{mat}(u, e)$ est symétrique.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. $S(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .

C'est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Propriété. Une projection est un endomorphisme symétrique ssi c'est une projection orthogonale.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Une symétrie est un endomorphisme symétrique ssi c'est une symétrie orthogonale.

Propriété. Si $u \in S(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors F^\perp est stable par u .

Théorème spectral : Si $u \in S(E)$, il existe au moins une base orthonormée de vecteurs propres de u . On dit que u est diagonalisable en base orthonormée.

6 Groupe orthogonal.

6.1 Caractérisations d'un automorphisme orthogonal.

Définition. Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un *automorphisme orthogonal* ou une *isométrie vectorielle* si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

- conservation du produit scalaire : $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- conservation de la norme : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
- si e est une base orthonormée de E , en posant $M = \text{mat}(u, e)$,
 M inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

Propriété. $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E .

Propriété. Si $u \in O(E)$, $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$.

Propriété. Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , F^\perp est stable par u .

6.2 Les rotations.

Propriété. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$, mais la réciproque est fausse.

Définition. Soit $u \in O(E)$. On dit que u est une *rotation* si et seulement si $\det(u) = 1$.
 u est une *isométrie vectorielle indirecte* ou négative si et seulement si $\det(u) = -1$.

Propriété. L'ensemble des rotations de E , noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $O(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal*. L'ensemble des isométries indirectes de E est noté $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$. Il n'a pas de structure particulière.

6.3 Les symétries orthogonales

Propriété. La symétrie par rapport à F parallèlement à G (où $F \oplus G = E$) est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (ie : $G = F^\perp$).

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Notons s la symétrie orthogonale par rapport à F . $s \in SO(E)$ si et seulement si $\dim(E) - \dim(F)$ est paire.

En particulier, si F est un hyperplan, $s \in O^-(E)$ et, dans ce cas, s est appelée une *réflexion*, et si $\dim(F) = \dim(E) - 2$, s est une rotation, et dans ce cas, s est appelée un *retournement*.

Définition. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont perpendiculaires lorsque F^\perp et G^\perp sont orthogonaux, c'est-à-dire lorsque $G^\perp \subset F$.

6.4 Matrices orthogonales.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est une *matrice orthogonale* si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

- ${}^t M M = I_n$;
- $M {}^t M = I_n$;
- M est inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Propriété. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé le **groupe orthogonal de degré n** et noté $O(n)$.

Propriété. Pour tout $M \in O(n)$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Définition. Les matrices orthogonales de déterminant égal à 1 sont appelées les **matrices de rotations**. Les matrices orthogonales de déterminant égal à -1 sont appelées les matrices orthogonales gauches ou indirectes. L'ensemble des matrices de rotations est un sous-groupe de $O(n)$, appelé **groupe spécial orthogonal de degré n** et noté $SO(n)$. L'ensemble des matrices orthogonales indirectes est noté $O^-(n) = O(n) \setminus SO(n)$. Il n'a pas de structure particulière.

Propriété. $M \in O(n)$ si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes (ou de ses vecteurs lignes) est orthonormale dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient e une base orthonormée de E et e' une base quelconque de E . e' est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de e à e' est orthogonale.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $u \in O(E)$;
- $\text{mat}(u, e) \in O(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée.

Propriété. (Hors programme) Dans une matrice orthogonale droite, chaque coefficient est égal à son cofacteur. Dans une matrice orthogonale gauche, chaque coefficient est l'opposé de son cofacteur.

Propriété. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^{-1} = PD^tP$.

7 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, pour le moment non muni d'une structure euclidienne.

Notation. \mathcal{B} étant l'ensemble des bases de E , on convient que $\forall (e, e') \in \mathcal{B}^2$, $e\mathcal{R}e' \iff \det(P_e^{e'}) > 0$.

Propriété. \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathcal{B} .

\mathcal{B}/\mathcal{R} est formé de deux éléments qui sont appelés les **orientations** de E .

“Orienter E ”, c'est choisir l'une de ces deux orientations qui devient l'ensemble des **bases directes**.

Hypothèse : jusqu'à la fin de ce chapitre, on suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension $n > 0$.

Définition. Soit D une droite vectorielle incluse dans E que l'on oriente en choisissant un vecteur unitaire $\vec{k} \in D$. “Orienter l'hyperplan D^\perp par le vecteur \vec{k} de D ”, c'est choisir comme orientation de D^\perp l'ensemble des bases (e_1, \dots, e_{n-1}) de D^\perp telles que $(e_1, \dots, e_{n-1}, \vec{k})$ est une base directe de E .

Propriété. Soient e et e' deux bases orthonormées de E . On suppose que e est directe. Alors e' est directe si et seulement si $P_e^{e'} \in SO(n)$.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée directe de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $u \in SO(E)$;
- $\text{mat}(u, e) \in SO(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée directe.

8 Produit mixte.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace euclidien **orienté** de dimension $n > 0$.

Définition. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Le **produit mixte** de (x_1, \dots, x_n) est $\det_e(x_1, \dots, x_n)$, où e est une base orthonormée directe quelconque de E . Il est noté $\det(x_1, \dots, x_n)$ ou encore $[x_1, \dots, x_n]$.

Remarque.

Si on change l'orientation de l'espace E , le produit mixte est changé en son opposé.

Propriété.

On suppose que $n = 2$. L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ vaut $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Propriété. On suppose que $n = 3$. Le volume d'un parallélépipède dont les côtés correspondent aux vecteurs u , v , et w vaut $|\det(u, v, w)|$.