

# Corrigé du DM 59

## Mines, MP 2001.

### I.1. Premières propriétés.

**a.** Si  $x$  est vecteur co-propre (non nul) associé à  $\mu_1$  et  $\mu_2$  il vient  $(\mu_1 - \mu_2)x = 0$  donc  $\mu_1 = \mu_2$  car  $x \neq 0$ .

**b.** Si  $u(x) = \mu x$  avec  $x \neq 0$ , alors  $u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\theta}\mu e^{-i\frac{\theta}{2}}x$ ; de plus  $e^{-i\frac{\theta}{2}}x \neq 0$ , donc  $\boxed{e^{-i\frac{\theta}{2}}x}$  est co-propre associé à la valeur co-propre  $e^{i\theta}\mu$ .

**I-1.c** Il y a bien additivité puisque, si  $(x, x') \in E_\mu^2$ ,

$$u(x + x') = u(x) + u(x') = \mu x + \mu x' = \mu(x + x').$$

De plus  $E_\mu$  est non vide, donc c'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel si et seulement si pour tout  $(a, x) \in \mathbb{K} \times E_\mu$ ,  $u(ax) = \mu ax$ , c'est-à-dire  $\mu \bar{a}x = \mu ax$ .

◇ Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , cette condition est réalisée lorsque  $\mu = 0$ .

Lorsque  $\mu \neq 0$ , il existe  $x \in E_\mu \setminus \{0\}$  et  $\mu \bar{i}x \neq \mu ix$ , donc  $E_\mu$  n'est pas un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel lorsque  $\mu \neq 0$ .

◇ Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la condition est toujours réalisée et  $E_\mu$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**I-1.d** On a en effet,

$$\begin{aligned} u \circ v(ax + by) &= u(\bar{a}v(x) + \bar{b}v(y)) = \bar{\bar{a}}(u \circ v)(x) + \bar{\bar{b}}(u \circ v)(y) \\ &= a(u \circ v)(x) + b(u \circ v)(y), \end{aligned}$$

donc  $u \circ v$  est linéaire.

### I.2. Matrice associée à une application semi-linéaire.

**a.** Notons  $A = (a_{ij})$  la matrice dont le  $(i, j)$ -ème coefficient  $a_{i,j}$  est égal à la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_k)$ . Soit  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  et  $y = \sum_{k=0}^n y_k e_k$  deux

vecteurs de  $E$ .  $u(x) = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k u(e_k) = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \sum_{i=1}^n a_{i,k} e_i$ , donc

$$y = u(x) \iff [\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad y_i = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k a_{i,k}]. \text{ Ainsi } \boxed{y = u(x) \iff Y = A\bar{X}}.$$

**b** Soit  $x$  quelconque de  $E$  et soit  $y = u(x)$ . Avec des notations claires on a, d'après **a.** ci-dessus :

$Y = A\bar{X}$  et  $Y' = B\bar{X}'$ . Or  $Y = SY'$  et  $X = SX'$  donc  $SY' = A\bar{S}\bar{X}' = A\bar{S} \bar{X}'$  soit

---

$Y' = (S^{-1}A\overline{S})\overline{X'}$  puisque  $S$  est inversible. Il en résulte que  $\Delta\overline{X'} = 0$  avec  $\Delta = B - S^{-1}A\overline{S}$  et cela pour tout vecteur  $x$  donc pour toute colonne  $X'$ . En prenant  $X'$  successivement égal aux vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , il vient que toutes les colonnes de  $\Delta$  sont nulles donc que  $\Delta$  est nulle. Ainsi  $\boxed{B = S^{-1}A\overline{S}}$ .

### I.3. Exemples.

**a.** Si  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  est vecteur co-propre (non nul) associé à la valeur co-propre  $\mu$

il vient  $\begin{cases} \overline{b} = -\mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$  donc  $\begin{cases} b = -|\mu|^2 b \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$ .

Or  $X \neq 0$  donc  $b \neq 0$  car  $b = 0$  implique  $a = 0$  donc  $X = 0$ .

Ainsi  $|\mu|^2 = -1$  ce qui est impossible.

*La rotation d'angle  $\pi/2$  n'admet aucune valeur co-propre.*

**b.** Si  $A$  est réelle et admet une valeur propre réelle  $\lambda$  alors il existe  $X$  vecteur réel non nul tel que  $AX = \lambda X$ . Or  $X = \overline{X}$  de sorte que  $A\overline{X} = \lambda X$ .

*Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est valeur propre de la matrice réelle  $A$  alors elle est également valeur co-propre.*

### I.4. Valeurs co-propre de $A$ et valeurs propres de $A\overline{A}$ .

**a.** L'hypothèse s'écrit  $A\overline{X} = \mu X$  avec  $X \neq 0$ , soit par conjugaison  $\overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X}$  et donc  $A\overline{A}X = A\overline{\mu}\overline{X} = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X$  avec  $X \neq 0$ .

**b.** Avec les notations de l'énoncé :

- Supposons  $A\overline{X}$  et  $X$  liés. Comme  $X \neq 0$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $A\overline{X} = \alpha X$  ce qui implique que  $\alpha$  est valeur co-propre de  $A$ . D'après **a.** ci-dessus  $A\overline{A}X = |\alpha|^2 X$ . Donc  $\lambda X = |\alpha|^2 X$  et  $\lambda = |\alpha|^2$  car  $X \neq 0$ . Il en résulte qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha = \sqrt{\lambda}e^{i\theta}$ . Comme  $\alpha$  est valeur co-propre de  $A$ , il en découle d'après **1.b.** que  $\sqrt{\lambda} = \alpha e^{-i\theta}$  est également valeur co-propre.

- Supposons désormais  $A\overline{X}$  et  $X$  indépendants. Il est naturel de chercher un vecteur co-propre associé à  $\sqrt{\lambda}$  dans le plan engendré par ces deux vecteurs ce qui revient à chercher un vecteur co-propre de la forme  $Y = A\overline{X} + \alpha X$ .

Or  $A\overline{Y} = \lambda X + \overline{\alpha}A\overline{X}$ . On constate que  $\alpha = \sqrt{\lambda}$  convient.

**c.** Il découle immédiatement de **a.** et de **b.** que :

$\mu \geq 0$  est valeur co-propre de  $A$  si et seulement si  $\mu^2$  est valeur propre de  $A\overline{A}$ .

### I.5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure.

**a.** Soit  $A$  triangulaire supérieure de diagonale, donc de spectre,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . On sait que la matrice  $A\overline{A}$  est triangulaire supérieure de diagonale, donc de spectre,  $(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$ . Ainsi si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $|\lambda|^2$  est valeur propre de  $A\overline{A}$ . D'après **4.** ci-dessus,  $|\lambda|$  est valeur co-propre de  $A$ , donc  $\lambda$  également d'après **1.b.**, puis  $\lambda e^{i\theta}$  est aussi valeur co-propre pour tout réel  $\theta$ , toujours d'après **1.b.**

**b.** Si  $\mu$  est valeur co-propre de  $A$  alors  $|\mu|$  est également valeur co-propre de  $A$  d'après **1.b.**, donc  $|\mu|^2$  est valeur propre de  $A\overline{A}$ . Ainsi,  $|\mu|^2$  figure sur la diagonale de  $A\overline{A}$ . Donc il existe  $\lambda$  sur la diagonale de  $A$ , donc valeur propre de  $A$ , tel que  $|\lambda|^2 = |\mu|^2$ . Ainsi, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda = \mu e^{i\theta}$ .

**c. Exemple :** Ici  $Sp(A) = \{i\}$  ; D'après (I-5.a)  $1 = ie^{-i\frac{\pi}{2}}$  est valeur co-propre de  $A$ . Comme le suggère l'énoncé on doit résoudre le problème suivant :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } (1) \iff \begin{pmatrix} ia + b + c - id \\ ic + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ia + b + c - id = a + ib \\ c + id = ic + d \end{cases};$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire de la seconde ligne, on obtient  $d = c$ , et en reportant dans la première, on obtient

$$ia + b + c - ic = a + ib \iff i(a - c - b) + b + c - a = 0, \text{ donc } a = b + c.$$

$$\text{Ainsi, } (1) \iff \begin{cases} a = b + c \\ d = c \end{cases}.$$

Le vecteur  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} b + c + ib \\ c + ic \end{pmatrix}$  est co-propre pour  $A$  avec la valeur co-propre 1, lorsque  $(b, c) \neq 0$ .

### I.6. Une caractérisation des valeurs co-propres.

D'après 1.b,  $\mu$  est valeur co-propre de  $A$  si et seulement si  $|\mu|$  est valeur co-propre de  $A = B + iC$ , donc si et seulement si il existe  $Z = X + iY \neq 0$  (avec  $X$  et  $Y$  dans  $\mathbb{R}^n$ ) tel que  $A\bar{Z} = |\mu|Z$  c'est à dire, en passant aux parties réelles et imaginaires, tel que

$$\begin{cases} BX + CY = |\mu|X \\ CX - BY = |\mu|Y \end{cases} \quad (S).$$

$(S) \iff D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  et d'autre part,  $Z \neq 0 \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$ , donc  $\mu$  est valeur co-propre de  $A$  si et seulement si  $|\mu|$  est valeur propre de  $D$ .

### II.1. Une relation d'équivalence.

Elle est en effet réflexive, symétrique et transitive :

$$\begin{cases} \text{Réflexivité} & : \text{avec } S = I_n, A = SAS^{-1}. \\ \text{Symétrie} & : \text{Si } B = SAS^{-1}, \text{ alors } A = RBR^{-1} \text{ où } R = S^{-1}. \\ \text{Transitivité} & : \text{Si } B = SAS^{-1} \text{ et si } C = RBR^{-1}, \text{ alors } C = RSA(\overline{RS})^{-1}. \end{cases}$$

### II.2. Indépendance des vecteurs co-propres.

◇ D'après I.4.a. la famille  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  est une famille de vecteurs propres de  $A\bar{A}$  associés aux valeurs propres  $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \dots, |\mu_k|^2$  qui sont deux à deux distinctes donc cette famille est libre par le théorème d'indépendance linéaire des sous-espaces propres.

◇ On en déduit en utilisant I.4.c., que si la matrice  $A\bar{A}$  admet  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  positives ou nulles et deux à deux distinctes, alors il existe une base  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que, pour tout  $i$ ,  $A\bar{X}_i = \sqrt{\lambda_i}X_i$ . Notons  $u$  l'unique application semi-linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est  $A$ . Il s'agit de l'application  $X \mapsto A\bar{X}$ . Alors, en notant  $(X_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  la base duale de  $X$ , pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ ,  $[\text{mat}(u, X)]_{i,j} = X_i^*(u(X_j)) = X_i^*(A\bar{X}_j) = X_i^*(\sqrt{\lambda_j}X_j) = \delta_{i,j}\sqrt{\lambda_j}$ , donc la matrice de  $u$  dans la base  $X$  est diagonale, de diagonale  $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ , donc  $A$  est co-diagonalisable.

### II.3. Quelques propriétés.

**a.** Si  $A = S\bar{S}^{-1}$  alors  $A\bar{A} = S.\bar{S}^{-1}.\overline{S}.\overline{(\bar{S})}^{-1} = I_n$ .

b. Pour toute matrice  $A$ , le spectre de  $A$  est de cardinal fini, donc on peut trouver  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $-e^{-2i\theta}$  ne soit pas valeur propre. Alors  $A + e^{-2i\theta}I_n$  est inversible puis  $S(\theta)$  est inversible.

Si on suppose en outre que  $A\bar{A} = I_n$  alors  $A\bar{S}(\theta) = S(\theta)$  d'où  $A = S(\theta)\bar{S}^{-1}(\theta)$ .

#### II.4. Une condition nécessaire de co-diagonalisabilité.

Notons  $S^{-1}A\bar{S} = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Il vient  $A\bar{A} = S D \bar{D} S^{-1}$ .

Ainsi  $A\bar{A}$  est semblable à  $D\bar{D} = \text{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$  donc est bien diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles. En outre le rang de  $A$  est égal à celui de  $D$  (puisque  $S$  et  $\bar{S}$  sont inversibles) donc au nombre de  $\lambda_i$  non nuls donc encore au rang de  $D\bar{D}$  puis à celui de  $A\bar{A}$  (qui est semblable à  $D\bar{D}$ ).

#### II.5. Une condition suffisante de co-diagonalisabilité.

a.  $B\bar{B} = (S^{-1}A\bar{S})(\bar{S}^{-1}AS) = S^{-1}A\bar{A}S = \Lambda$  Or  $\Lambda$  est réelle, donc  $B\bar{B} = \overline{B\bar{B}} = \bar{B}B = \Lambda$ .

Il vient alors  $B\Lambda = B(B\bar{B}) = B(\bar{B}B) = (B\bar{B})B = \Lambda B$ . Ainsi  $\Lambda$  et  $B$  commutent.

b. *Première méthode* : comme la matrice  $B$  commute avec la matrice  $\Lambda$ , les sous-espaces propres de  $\Lambda$  sont stables par  $B$ . En écrivant la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  sous la forme  $c = (c_{1,1}, \dots, c_{1,n_1}, c_{2,1}, \dots, c_{2,n_2}, \dots, c_{k,1}, \dots, c_{k,n_k})$ , les sous-espaces propres de  $\Lambda$  sont les  $E_i = \text{Vect}(c_{i,1}, \dots, c_{i,n_i})$  pour  $i \in \mathbb{N}_k$ .

$B$  stabilise les  $E_i$ , donc la matrice  $B$  s'écrit par blocs sous la forme proposée.

*Seconde méthode* : On décompose  $B$  et  $\Lambda$  sous la forme de matrices blocs :  $B = (B_{i,j})$  et  $\Lambda = (\Lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ , où pour tout  $(i,j) \in \mathbb{N}_r^2$ ,  $B_{i,j}, \Lambda_{i,j} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n_i, n_j)$ . En particulier,  $\Lambda_{i,j} = \lambda_i \delta_{i,j} I_{n_i}$ .

Alors le  $(i,j)$ -ème bloc de  $\Lambda B$  vaut  $[\Lambda B]_{i,j} = \sum_{k=1}^r \Lambda_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^r \delta_{i,k} \lambda_i B_{k,j} = \lambda_i B_{i,j}$ . De même,  $[B\Lambda]_{i,j} = \lambda_j B_{i,j}$ , or  $B\Lambda = \Lambda B$ , donc pour tout  $i,j \in \mathbb{N}_r$ ,  $(\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j} = 0$ , or lorsque  $i \neq j$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , donc pour  $i \neq j$ ,  $B_{i,j} = 0$ , ce qui prouve que  $B$  est bien diagonale par blocs.

c. De  $B\bar{B} = \Lambda$  on tire par blocs que  $B_i \bar{B}_i = \lambda_i I_{n_i}$ .

Si  $\lambda_i > 0$  on en déduit par **II.3.b.** que  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i$  est co-semblable à  $I_{n_i}$  donc que  $B_i$  est co-semblable à  $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$ .

Comme  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \geq 0$  il vient que ceci est valable pour  $i$  de 1 à  $k-1$ .

Si  $\lambda_k > 0$  c'est également vrai pour  $i = k$ .

Mais c'est encore vrai pour  $i = k$  même si  $\lambda_k = 0$ . En effet dans ce cas il vient  $\text{rg}(A\bar{A}) = \text{rg}(\Lambda) = n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$  et  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{rg}(B_1) + \text{rg}(B_2) + \dots + \text{rg}(B_k)$ . Or pour  $i \leq k-1$ ,  $B_i$  est co-semblable à  $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$  donc  $\text{rg}(B_i) = n_i$ . Comme par hypothèse  $A\bar{A}$  et  $A$  ont même rang, il vient que  $\text{rg}(B_k) = 0$  donc que  $B_k = 0$  et ainsi  $B_k$  (matrice nulle) est bien co-semblable  $\sqrt{\lambda_k} I_{n_k}$  (matrice nulle).

Ainsi  $B_i$  est co-semblable à  $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$  pour tout  $i$  de 1 à  $k$ . Il en découle immédiatement par blocs que  $B$  est co-semblable à la matrice  $\Delta$  obtenue à partir de  $\Lambda$  en remplaçant les  $\lambda_i$  par  $\sqrt{\lambda_i}$ .

Or  $A$  est co-semblable à  $B$  donc à  $\Delta$ .

En résumé :

---

*Les trois propriétés constituent une condition nécessaire et suffisante de co-diagonalisabilité.*

## **II.6. Exemples.**

**a.** Si  $A$  est symétrique réelle, on sait qu'elle est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe  $P \in O(n)$  et  $D$  une matrice diagonale à coefficients réels tels que  $A = PDP^{-1}$ . Mais  $P$  est à coefficients réels, donc  $A = PD\overline{P}^{-1}$  ce qui prouve que  $A$  est co-diagonalisable.

**b.**

◇  $Sp(A) = \{i\}$  et  $A \neq iI_2$ , donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

$A\overline{A} = I_2$  donc la condition du II.5 est clairement satisfaite.  *$A$  est co-diagonalisable.*

◇  $\chi_B(X) = X^2 - 2X + 2$ , de discriminant  $\Delta = 4 - 8 \neq 0$ , donc  $B$  possède deux valeurs propres simples. Ainsi,  $B$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

$B\overline{B} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dont les valeurs propres ne sont pas réelles.  *$B$  n'est pas co-diagonalisable.*

◇  $Sp(C) = \{0\}$  et  $C \neq 0$ , donc  $C$  n'est pas diagonalisable.

$C\overline{C} = 0$  alors que  $C$  est de rang 1.  *$C$  n'est pas co-diagonalisable.*

◇  $\chi_D(X) = X^2 - 2X + 2$ , de discriminant  $\Delta = 4 - 8 \neq 0$ , donc  $D$  possède deux valeurs propres simples. Ainsi,  $D$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

$D\overline{D} = 2I_2$  et la condition du II.5 est clairement satisfaite.  *$D$  est co-diagonalisable.*