

Feuille d'exercices 25. Corrigé d'un exercice

Exercice 25.14 :

1°) A est symétrique, donc il existe $P \in O(p)$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.

De plus, A est définie positive, donc, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\lambda_i \in Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$ et $R(A) = P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}$.

${}^tR(A) = P^t\Delta^tP = R(A)$, donc $R(A)$ est symétrique.

De plus, $Sp(R(A)) = Sp(\Delta) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $R(A)$ est définie positive.

Enfin, $R(A)^2 = P\Delta^2P^{-1} = A$.

2°) \diamond Notons $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{\lambda}{x})$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On remarque que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$, or $u_0 > 0$, donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est correctement défini et appartient à \mathbb{R}_+^* .

\diamond f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{x^2})$,

donc $f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{\lambda}$. Traçons le tableau de variations de f .

x	0	$\sqrt{\lambda}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \sqrt{\lambda} \nearrow$	$+\infty$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

\diamond Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{u_n} - u_n) = \frac{1}{2u_n}(\lambda - u_n^2) \leq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante, minorée par $\sqrt{\lambda}$. Elle converge donc vers un réel $l \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

f étant continue en l , $l = f(l)$, donc $0 = f(l) - l = \frac{1}{2l}(\lambda - l^2)$, donc $l = \sqrt{\lambda}$.

En conclusion, $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante qui tend vers $\sqrt{\lambda}$.

3°) [La suite $\Delta_n = P^{-1}X_nP$ vérifie les relations $\Delta_0 = I_p$ et $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$, donc c'est une suite de matrices diagonales. Si l'on note $u_{i,n}$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de Δ_n , la suite $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la question précédente, donc elle tend vers $\sqrt{\lambda_i}$, ce qui permet de conclure.

Pour gérer correctement les problèmes d'existence de ces matrices, il est plus simple de commencer par construire les suites $(u_{i,n})$, puis de construire D_n et X_n .

◇ Reprenons les notations de la première question. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, notons $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels définie par les relations suivantes : $u_{i,0} = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) : u_{i,n+1} = \frac{1}{2} \left(u_{i,n} + \frac{\lambda_i}{u_{i,n}} \right).$$

D'après la seconde question, $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est correctement définie et elle converge vers $\sqrt{\lambda_i}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\Delta_n = \text{diag}(u_{1,n}, \dots, u_{p,n})$ et $R_n = P\Delta_n P^{-1}$. La suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers Δ , or l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est continue (elle est linéaire en dimension finie), donc $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P\Delta P^{-1} = R(A)$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $u_{i,n} > 0$, donc Δ_n est inversible et, d'après la relation (1), $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$. En multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite, on en

déduit que R_n est inversible et que $R_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$.

De plus $\Delta_0 = \text{diag}(1, \dots, 1) = I_p$, donc $R_0 = I_p$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = X_n$, ce qui montre que la suite (X_n) de l'énoncé est correctement définie et qu'elle converge vers $R(A)$.