

Feuille d'exercices 26.

Calcul différentiel et familles sommables

Calcul différentiel

Exercice 26.1 : (niveau 1)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = (x^2 + xy) \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ lorsque $x = 0$.

1°) Etudier la continuité de f .

2°) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

3°) Les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0, 0)$?

Exercice 26.2 : (niveau 1)

Sur $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, on pose $f(x, y) = \cos^2(x) + sh^2(y)$.

1°) Quels sont les points critiques de la restriction de f à l'intérieur de B ? Préciser la nature de ces points critiques.

2°) Calculer $\sup_{(x,y) \in B} f(x, y)$.

Exercice 26.3 : (niveau 2)

Soit X_0 un élément de \mathbb{R}^3 . Déterminer les applications $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\text{grad}}(\Psi)(X) = \Psi(X)X_0$.

Exercice 26.4 : (niveau 2)

U désigne un ouvert de \mathbb{C} .

Soit f une application de U dans \mathbb{C} .

On considère \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 et on se place dans la \mathbb{R} -base $(1, i)$ de \mathbb{C} .

Soit $a \in U$. On dit que f est holomorphe en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \neq 0]{h \rightarrow 0} \ell$. Dans ce cas, on pose $\ell = f'(a)$.

1°) Montrer que f est holomorphe en a si et seulement si f est différentiable en a , avec $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

2°) On suppose que f est holomorphe en tout point de U .

Ainsi f' est définie sur U . On suppose également que f' est holomorphe sur U .

Montrer que pour tout $a \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 0$.

Réciproquement, si f vérifie cette dernière condition, f est-elle nécessairement holomorphe sur U ?

Exercice 26.5 : (niveau 2)

Notons $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $X \mapsto \sqrt{\text{Tr}(I_n + {}^t X X)}$. Calculer les dérivées partielles de f .

Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 26.6 : (niveau 2)

Déterminer les points critiques de l'application $M \mapsto \det(M)$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

Exercice 26.7 : (niveau 3)

1°) On pose $f(u, v) = uv(1 - u - v)$.

Justifier que f admet un maximum global sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Étudier les extremums de f sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

2°) Dans le plan usuel, ABC désigne un triangle rectangle isocèle. Si M est un barycentre des points A, B, C à poids positifs, on note $g(M)$ le produit des distances de M aux 3 côtés du triangle. Déterminer les extremums de g .

Exercice 26.8 : (niveau 3)

Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$ de $(x, y) \mapsto \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$.

Familles sommables

Exercice 26.9 : (niveau 1)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Calculer la somme de la famille double $\left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Exercice 26.10 : (niveau 1)

Soit $(a, b) \in]1, +\infty[^2$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Exercice 26.11 : (niveau 2)

Pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on pose

$$u_{m,n} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^m - \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^m.$$

1°) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 1} u_{m,n}$ converge et calculer sa somme notée v_m , puis montrer que la série $\sum_{m \geq 1} v_m$ converge et calculer sa somme.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{m \geq 1} u_{m,n}$ converge et calculer sa somme notée w_n , puis montrer que la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge et calculer sa somme.

3°) Commenter les résultats précédents.

Exercice 26.12 : (niveau 2)

1°) A quelle condition sur α peut-on poser $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum R_n$.

3°) En cas de convergence, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^{\alpha-1}}$.

Exercice 26.13 : (niveau 2)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la famille $\left(\frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

Exercice 26.14 : (niveau 3)

En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, calculez $\sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$.

Exercice 26.15 : (niveau 3)

Produit eulérien :

On note \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers et on désigne par p_n le n ième nombre premier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des entiers non nuls dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que les nombres premiers p_k avec $k \leq n$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m \in A_n \iff [\forall p \in \mathbb{P}, p|m \implies p \in \{p_1, \dots, p_n\}]$.

On fixe $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$.

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{q \in A_n} q^{-s}.$$

2°) En déduire que
$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-s}.$$

Exercice 26.16 : (niveau 3) On note \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers et on désigne par p_n le n ième nombre premier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des entiers non nuls dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que les nombres premiers p_k avec $k \leq n$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m \in A_n \iff [\forall p \in \mathbb{P}, p|m \implies p \in \{p_1, \dots, p_n\}]$.

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \sum_{q \in A_n} \frac{1}{q}.$$

2°) En déduire que
$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

3°) Montrer que $\sum_k \frac{1}{p_k}$ diverge.

Exercices supplémentaires

Calcul différentiel

Exercice 26.17 : (niveau 1)

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X^2 \end{array}$ est une application de classe C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 26.18 : (niveau 2)

Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Déterminez les points critiques de f .

Montrez que la restriction de f à toute droite passant par l'origine admet un minimum local en l'origine mais que f n'admet pas d'extremum local en l'origine.

Expliquer ce phénomène en étudiant $\{(x, y)/f(x, y) < 0\}$.

Exercice 26.19 : (niveau 2)

Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 26.20 : (niveau 3)

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. Notons, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \text{Tr}(M^p)$.

Montrer que φ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 26.21 : (niveau 3)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une application de classe C^2 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et u un automorphisme orthogonal de \mathbb{R}^n . On pose $\tilde{f} = f \circ u$. On rappelle que le laplacien de f est

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}. \text{ Montrer que } \Delta \tilde{f} = (\Delta f) \circ u.$$

Exercice 26.22 : (niveau 3)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 . On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par les relations suivantes : Si $x \neq y$, $g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ et si $x = y$, $g(x, x) = f'(x)$.

Montrez que g est une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 26.23 : (niveau 3)

Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. On fixe $u \in U$ et on suppose que toutes les dérivées partielles de f existent en u .

Montrer que f est différentiable en u .

Familles sommables

Exercice 26.24 : (niveau 1)

On considère la famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}}$, définie par les relations suivantes : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{p,p} = 1$, $u_{2p,2p+1} = u_{2p+1,2p} = -1$, les autres éléments de la famille étant nuls.

Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$ la série $\sum_n u_{m,n}$ est convergente et que la série $\sum_m \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$ est convergente.

La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}}$ est-elle sommable ?

Exercice 26.25 : (niveau 1)

Etudier la sommabilité des suites doubles $(\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}q^{\frac{3}{2}}})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ et $(\frac{1}{pq(p+q)})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$.

Exercice 26.26 : (niveau 2)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer que la famille $(f(q))_{q \in \mathbb{Q}}$ est sommable si et seulement si f est nulle.

Exercice 26.27 : (niveau 2)

On pose $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

1°) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2°) Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, On pose $u_{p,q} = \frac{1}{p^2 - q^2}$ si $p \neq q$ et $u_{p,p} = 0$.

Justifier l'existence et calculer $\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$.

3) Que dire de $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$?

Exercice 26.28 : (niveau 2)

Calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} 2^{-3q-p-(p+q)^2}$.

Exercice 26.29 : (niveau 2)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1°) Déterminez la nature de la famille $(\frac{1}{(p+q)^\alpha})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{0\}}$.

2°) Pour la suite de l'exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On note $S_r = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n / p_1 + \dots + p_n = r\}$ et E_r l'ensemble des suites strictement croissantes de \mathbb{N}_{n+r-1} contenant exactement $n-1$ éléments. On considère l'application suivante

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_r & \longrightarrow & S_r \\ (a_1, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto & (a_i - a_{i-1} - 1)_{1 \leq i \leq n} \end{array}$$

où pour toute suite $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in E_r$ on convient que $a_0 = 0$ et $a_n = n + r$. Montrez que φ est bijective et en déduire le cardinal de S_r .

3°) Déterminez la nature de la famille $\left(\frac{1}{(p_1 + \dots + p_n)^\alpha} \right)_{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}}$.

Exercice 26.30 : (niveau 2)

On note A l'ensemble des entiers naturels non nuls dont l'écriture décimale ne comporte aucun 9. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{a} \right)_{a \in A}$ est sommable.

Exercice 26.31 : (niveau 3)

Soient (a_n) et (u_n) deux suites de complexes.

1°) Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, montrer que $\sup_{k \in \{E(\frac{n}{2}), \dots, n\}} |u_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, où $E(h)$ désigne la partie entière de h .

2°) Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et si $\sum a_n$ est absolument convergente, montrer que le terme général du produit de Cauchy de $\sum a_n$ et de $\sum u_n$ tend vers 0.

3°) Si $\sum u_n$ converge et si $\sum a_n$ est absolument convergente, montrer que $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\text{où } \delta_n = \sum_{p=0}^n a_p \sum_{q=0}^n u_q - \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^k a_q u_{k-q}.$$

Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 26.32 : (niveau 3)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de complexes telle que $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ est absolument convergente.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k |a_k| e^{ikx} \right)^2 dx = \frac{2\pi}{i} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} \frac{|a_k| |a_p|}{k+p}.$$

2°) Montrer que la famille $\left(\frac{a_p a_q}{p+q} \right)_{p, q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

Exercice 26.33 : (niveau 3)

Soit A une partie de \mathbb{N}^* . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = |A \cap \{1, \dots, n\}|$.

Si $d_n \sim \frac{n}{\ln n}$, montrer que la famille $\left(\frac{1}{a} \right)_{a \in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 26.34 : (niveau 3)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1, \frac{p}{q} < x}} \frac{1}{2^{|p|+q}}$.

Montrer que f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que f est croissante et déterminer l'ensemble de ses points de discontinuité.