

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni le vendredi 19 juin.

### Introduction

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier strictement positif, et les espaces vectoriels sont toujours des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

Dans ce problème, on appelle corps toute  $\mathbb{R}$ -algèbre, éventuellement non commutative, dans laquelle tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

### Partie I : Étude d'un exemple

1°) Soit  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Vérifier que:

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

2°) Soit  $A$  une matrice non scalaire; on note  $\mathbb{A}$  l'ensemble

$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = aI_2 + bA\}$$

Vérifier que  $\mathbb{A}$  est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

3°) Montrer que  $\mathbb{A}$  contient une matrice  $B$  telle que  $B^2 = -I_2$  si et seulement si  $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$ .

4°) Vérifier qu'alors  $I_2$  et  $B$  forment une base de  $\mathbb{A}$  et en déduire un isomorphisme d'algèbres entre  $\mathbb{A}$  et le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

5°) On suppose que  $A$  est non scalaire et vérifie:  $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$ . Déterminer toutes les matrices de  $\mathbb{A}$  telles que  $M^2 = 0$ , et en déduire que  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps.

6°) Soit  $B$  une matrice non scalaire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On lui associe l'algèbre  $\mathbb{B}$  comme dans I.2. Démontrer que si  $A$  et  $B$  sont semblables,  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont des algèbres isomorphes.

7°) On suppose que  $\mathbb{A}$  est telle que:  $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$ . Vérifier que  $A$  est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que  $\mathbb{A}$  est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que  $\mathbb{A}$  est un corps ?

### Partie II : Quelques résultats généraux

Soit  $\mathbb{D}$  une algèbre de dimension finie  $n$ .

1°) Soit  $a$  un élément de  $\mathbb{D}$ , démontrer que l'application  $\varphi_a$ , définie par:

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{D} & \rightarrow & \mathbb{D} \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{D}$ .

2°) On note  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{D}$ .  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$  désigne la matrice de l'endomorphisme  $\varphi_a$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Démontrer que l'application:

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{D} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a) \end{cases}$$

est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que  $\Psi(\mathbb{D})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et en déduire que  $\mathbb{D}$  est isomorphe à une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3°) On suppose que  $\mathbb{D} = \mathbb{C}$ , corps des nombres complexes. On munit  $\mathbb{C}$ , considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, de la base  $\mathcal{B} = (1, i)$ . Pour tout nombre complexe  $z = a + ib$ , ( $a$  et  $b$  réels), écrire la matrice  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_z)$ .

4°) Soit maintenant  $\mathbb{A}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que  $\mathbb{A}$  est, ou n'est pas, un corps.

- a) On suppose que  $\mathbb{A}$  contient une matrice non scalaire  $A$  qui a une valeur propre réelle  $\lambda$ . Montrer que  $\mathbb{A}$  ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de  $I_n$  et de  $A$ .
- b) En déduire que si  $\mathbb{A}$  contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.
- c) On suppose que  $\mathbb{A}$  est intègre, c'est-à-dire que:

$$\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Montrer que, si  $A$  est une matrice non nulle de  $\mathbb{A}$ , l'application  $\Phi_A : X \mapsto AX$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{A}$ . En déduire que  $\mathbb{A}$  est un corps.

### Partie III : L'algèbre des quaternions

On suppose qu'il existe deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que:

$$(*) \quad A^2 = -I_n, \quad B^2 = -I_n, \quad AB + BA = 0$$

- 1°) Démontrer que  $n$  ne peut pas être impair.
- 2°) Démontrer que le sous-espace vectoriel  $\mathbb{H}$  engendré par les matrices  $I_n, A, B$  et  $AB$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- 3°) Lorsque  $t, x, y$  et  $z$  sont des réels, calculer le produit:

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB)$$

4°) En déduire:

- (a) que les quatre matrices  $I_n, A, B$  et  $AB$  sont indépendantes et forment une base de  $\mathbb{H}$ ;
- (b) que  $\mathbb{H}$  est un corps.

5°) On suppose dans toute la suite du problème que  $n = 4$  et, en notant  $J$  la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et 0 la matrice nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on définit les matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  par:

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également  $C = AB$ .

- a) Vérifier que les matrices  $A$  et  $B$  satisfont la condition (\*). On appellera donc  $\mathbb{H}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  engendré par  $I_4, A, B$  et  $C = AB$ . Ses éléments sont appelés **quaternions**. La base  $(I_4, A, B, C)$  de  $\mathbb{H}$  sera notée  $\mathcal{B}$ .
- b) Soit  $M$  une matrice non nulle de  $\mathbb{H}$ , vérifier que  ${}^tM \in \mathbb{H}$ ; quel lien y a-t-il entre  $M^{-1}$  et  ${}^tM$  ?

### Partie IV : Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1°) On appelle quaternion pur un élément  $M$  de  $\mathbb{H}$  tel que  $M = -{}^tM$ . Vérifier que l'ensemble des quaternions purs est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension trois et de base  $\mathcal{C} = (A, B, C)$ . On le note  $\mathbb{L}$ . Est-ce une sous-algèbre de  $\mathbb{H}$  ?

2°) On munit  $\mathbb{L}$  de la structure d'espace vectoriel euclidien telle que la base  $\mathcal{C}$  soit orthonormée. Le produit scalaire de deux éléments  $M$  et  $N$  de  $\mathbb{L}$  est noté  $(M|N)$ . Ainsi, si  $M = xA + yB + zC$  et  $N = x'A + y'B + z'C$  alors  $(M|N) = xx' + yy' + zz'$ .

On appelle norme de  $M$  la quantité  $\|M\| = \sqrt{(M|M)}$ .

Vérifier que:

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4.$$

3°) Montrer qu'un quaternion est pur si, et seulement si, son carré est une matrice scalaire de la forme  $\lambda I_4$  où  $\lambda$  est un réel négatif.

4°) Soit  $\varphi$  un isomorphisme d'algèbre de  $\mathbb{H}$  dans lui-même. Démontrer qu'il transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme, et que la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{L}$  est un endomorphisme orthogonal : si  $u \in L(\mathbb{L})$ ,  $u$  est un endomorphisme orthogonal si et seulement si pour tout  $M \in \mathbb{L}$ ,  $\|u(M)\| = \|M\|$ .

5°) Soient  $M$  et  $N$  deux quaternions purs. On veut démontrer que si  $M$  et  $N$  ont même norme, alors il existe  $P \in \mathbb{H}$ , non nulle, telle que:  $M = P^{-1}NP$ .

a) Commencer par examiner le cas où  $M$  et  $N$  sont colinéaires.

b) On suppose maintenant que  $M$  et  $N$  ne sont pas colinéaires. Vérifier que si  $M$  et  $N$  ont même norme :

$$M(MN) - (MN)N = \|M\|^2(M - N)$$

et en déduire une matrice  $P$  non nulle telle que  $MP = PN$ .

6°) Montrer qu'alors, si on écrit  $P = \alpha I_4 + Q$ , avec  $\alpha$  réel et  $Q \in \mathbb{L}$ ,  $Q$  est orthogonal à  $M$  et à  $N$ .

7°) En déduire que tout isomorphisme d'algèbre  $\varphi$  de  $\mathbb{H}$  dans lui-même est défini par:

$$\varphi(M) = P^{-1}MP$$

où  $P$  est un élément non nul de  $\mathbb{H}$ . On pourra observer qu'un tel isomorphisme est déterminé par l'image de  $A$  et de  $B$ , et commencer par chercher les isomorphismes qui laissent  $A$  invariante.

**Fin de l'énoncé.**