

# DM 61 : corrigé

## CCP 2002 MP

### I. Étude d'un exemple

1.  $\diamond$  *Première méthode : avec les connaissances dont vous disposez.*

Posons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On calcule  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + cb & ac + cd \\ ab + bd & bc + d^2 \end{pmatrix}$ , donc

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + cb - (a+d)a + ad - bc & ac + cd - (a+d)c \\ ab + bd - (a+d)b & bc + d^2 - (a+d)d + (ad - bc) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a bien  $A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$ .

- $\diamond$  *Seconde méthode : avec les connaissances de seconde année.*

Le polynôme caractéristique de  $A$  vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$$

or d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_A(A) = 0$  donc  $A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$ .

2. Par définition,  $\mathbb{A}$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $I_2$  et  $A$  donc c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . De plus,  $A$  n'est pas une matrice scalaire donc  $(I_2, A)$  est une famille libre et par conséquent une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{A}$ .

Enfin,  $\mathbb{A}$  est stable pour le produit car si  $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ ,

$$(1) : (aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = (aa' - bb'\det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb'\text{Tr}(A))A \in \mathbb{A}$$

et  $\mathbb{A}$  contient  $I_2$ , donc  $\mathbb{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de dimension 2.

3. Soit  $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ . D'après la relation (1) ci-dessus,

(C) :  $B^2 = -I_2 \iff -I_2 = (a^2 - b^2\det(A))I_2 + (2ab + b^2\text{Tr}(A))A$ , or  $(I_2, A)$  est libre, donc

$$(C) \iff \begin{cases} 2ab + b^2\text{Tr}A = 0 \\ a^2 - b^2\det A = -1 \end{cases}. \text{ Si } b = 0, (C) \implies a^2 = -1, \text{ ce qui est faux dans } \mathbb{R}, \text{ donc on}$$

peut supposer que  $b \neq 0$ . Alors  $(C) \iff \begin{cases} a = -\frac{b}{2}\text{Tr}A \\ b^2\det A - a^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{b}{2}\text{Tr}A \\ b^2(\det A - \frac{1}{4}(\text{Tr}A)^2) = 1 \end{cases}.$

Si  $(\text{Tr}(A))^2 \geq 4\det(A)$ , alors  $(C) \implies 1 \leq 0$ , donc il n'existe aucune matrice  $B \in \mathbb{A}$  telle que  $B^2 = -I_2$ .

Réciproquement, si  $(\text{Tr}(A))^2 < 4\det(A)$ , alors  $(C) \iff \begin{cases} b = \pm \frac{2}{\sqrt{4\det A - (\text{Tr}A)^2}} \\ a = -\frac{b}{2}\text{Tr}A \end{cases}$ , donc il

existe des matrices  $B \in \mathbb{A}$  telles que  $B^2 = -I_2$ .

4.  $\diamond$  On suppose que  $B \in \mathbb{A}$  est telle que  $B^2 = -I_2$ . Alors  $B$  n'est pas une matrice scalaire (car si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda I_2)^2 = \lambda^2 I_2 \neq -I_2$ ) donc  $(I_2, B)$  est une famille libre de  $\mathbb{A}$ , or  $\dim(\mathbb{A}) = 2$ , donc  $(I_2, B)$  est une base de  $\mathbb{A}$ .

$\diamond$  Définissons alors  $f$  comme l'unique application linéaire entre les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{C}$  telle que  $f(I_2) = 1$  et  $f(B) = i$ . Alors  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels car elle envoie une base de  $\mathbb{A}$  sur une base de  $\mathbb{C}$ . De plus  $f(I_2) = 1$ . Enfin, si  $M = xI_2 + yB$  et  $M' = x'I_2 + y'B$  sont deux éléments de  $\mathbb{A}$ ,  $MM' = xx'I_2 + (xy' + x'y)B + yy'B^2 = (xx' - yy')I_2 + (xy' + x'y)B$  donc  $f(MM') = (xx' - yy')f(I_2) + (xy' + x'y)f(B) = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$  et  $f(M)f(M') = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$ .

On a donc  $f(MM') = f(M)f(M')$  ce qui achève de montrer que  $f$  est un isomorphisme d'algèbres entre  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{C}$ .

5. D'après le calcul fait en question 3, en posant  $M = aI_2 + bA$ ,

$$M^2 = 0 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 \det A = 0 \\ 2ab + b^2 \text{Tr} A = 0 \end{cases} \iff b = a = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -\frac{b}{2} \text{Tr} A \\ b^2 \left( \frac{1}{4} (\text{Tr} A)^2 - \det A \right) = 0 \end{cases},$$

donc, compte-tenu de l'hypothèse  $(\text{Tr} A)^2 = 4 \det A$ ,  $M^2 = 0 \iff a = -\frac{b}{2} \text{Tr} A$ .

En conclusion, les solutions de l'équation  $M^2 = 0$  dans  $\mathbb{A}$  sont les matrices de la forme  $b \left( \left( -\frac{\text{Tr} A}{2} \right) I_2 + A \right)$  avec  $b \in \mathbb{R}$ .

Il existe donc dans  $\mathbb{A}$  des matrices non nulles de carré nul, donc non inversibles, par conséquent  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps.

6. Par hypothèse,  $B$  est une matrice non scalaire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et il existe  $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ . On en déduit que  $A$  n'est pas non plus scalaire et  $(I_2, A)$  est une base de  $\mathbb{A}$ . Définissons  $g$  comme l'unique application linéaire de  $\mathbb{A}$  dans  $\mathbb{B}$  telle que  $g(I_2) = I_2$  et  $g(A) = B$ . L'application  $g$  est alors un isomorphisme car elle est linéaire et elle envoie une base de  $\mathbb{A}$  sur une base de  $\mathbb{B}$ . De plus, on a  $\forall M = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ ,

$g(M) = aI_2 + bB = aI_2 + bP^{-1}AP = P^{-1}(aI_2 + bA)P = P^{-1}MP$ . On en déduit que pour tout  $(M, M') \in \mathbb{A}^2$ ,  $g(M)g(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = g(MM')$  ce qui achève de montrer que  $g$  est un isomorphisme d'algèbres. Par suite,  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont deux algèbres isomorphes.

7.  $\diamond$  Supposons que  $(\text{Tr} A)^2 > 4 \det A$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff A - \lambda I_2 \notin \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0$ ,

or  $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \chi_A(\lambda)$ . On a ainsi montré que les valeurs propres de  $A$  sont exactement les racines du polynôme  $\chi_A$  (ce qui est un résultat au programme de seconde année).

$\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$ , or  $(\text{Tr} A)^2 > 4 \det A$ , donc le discriminant du polynôme caractéristique de  $A$  est strictement positif. Ainsi  $\chi_A$  possède deux racines réelles distinctes *i.e.*  $A$  possède deux valeurs propres réelles distinctes ce qui implique sa diagonalisabilité dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , car la somme directe des deux sous-espaces propres associés est de dimension au moins 2, donc est égale à  $\mathbb{R}^2$ .

$\diamond$  Ainsi, il existe une matrice  $B$  diagonale qui est semblable à  $A$ . D'après la question précédente,  $\mathbb{A}$  est isomorphe à  $\mathbb{B} = \text{vect} \{I_2, B\}$ . Or  $\mathbb{B}$  est égal à l'espace  $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$  des matrices carrées diagonales d'ordre 2 : en effet  $\mathbb{B} \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$  et  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{B}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}))$  (car  $\left( E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ ). Ainsi,  $\mathbb{A}$  est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales.

On en déduit que  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps car si  $h$  désigne un isomorphisme de  $\mathbb{A}$  sur  $\mathbb{B} = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ ,  $h^{-1}(E_{11})$  et  $h^{-1}(E_{22})$  sont deux éléments non nuls de  $\mathbb{A}$  dont le produit est nul donc ce sont des éléments non nuls et non inversibles dans  $\mathbb{A}$ .

## II. Quelques résultats généraux

1. Soit  $x, y \in \mathbb{D}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$\varphi_a(x + \alpha y) = a(x + \alpha y) = ax + a(\alpha y)$  d'après la distributivité de la multiplication par rapport au produit, donc  $\varphi_a(x + \alpha y) = ax + \alpha(a y) = \varphi_a(x) + \alpha \varphi_a(y)$ .

Ainsi  $\varphi_a$  est un endomorphisme de  $\mathbb{D}$ .

2.  $\diamond$  Soit  $a, b \in \mathbb{D}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{D}$ ,  $\varphi_{a+\alpha b}(x) = (a + \alpha b)x = \varphi_a(x) + \alpha \varphi_b(x)$ , donc  $\varphi_{a+\alpha b} = \varphi_a + \alpha \varphi_b$ , puis en passant aux matrices,  $\Psi(a + \alpha b) = \Psi(a) + \alpha \Psi(b)$ .

De plus,  $\varphi_{ab}(x) = a(bx) = \varphi_a \circ \varphi_b(x)$ , donc en passant aux matrices,  $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$ .

Enfin,  $\Psi(1_{\mathbb{D}}) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{D}}) = I_n$ .

Ainsi  $\Psi$  est un morphisme d'algèbres.

$\diamond$  Soit  $a \in \mathbb{D}$  tel que  $\Psi(a) = 0 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$ .

Alors  $\varphi_a = 0$ , puis  $a = \varphi_a(1_{\mathbb{D}}) = 0$ . Ainsi  $\Psi$  est injective.

$\diamond$   $\Psi(\mathbb{D})$  est alors une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , en tant qu'image d'un morphisme d'algèbres.

On peut vérifier plus généralement que l'image par un morphisme d'algèbres  $\varphi : A \rightarrow B$  d'une sous-algèbre  $C$  de  $A$  est une sous-algèbre de  $B$  :

$1_B = \varphi(1_A) \in \varphi(C)$  car  $1_A \in C$ .

Si  $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(C)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(C)$  car  $ab \in C$

et  $\varphi(a) + \alpha \varphi(b) = \varphi(a + \alpha b) \in \varphi(C)$  car  $a + \alpha b \in C$ .

$\diamond$  Par restriction,  $\Psi|_{\Psi(\mathbb{D})}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{D}$  dans  $\Psi(\mathbb{D})$ , donc  $\mathbb{D}$  est isomorphe à  $\Psi(\mathbb{D})$  qui est bien une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. Si  $\mathbb{D} = \mathbb{C}$  et  $z = a + ib$ ,  $\varphi_z(1) = z = a + ib$  et  $\varphi_z(i) = (a + ib)i = -b + ia$  donc si  $\mathcal{B} = (1, i)$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

4. (a)  $A - \lambda I_n$  appartient à  $\mathbb{A}$  (car  $\mathbb{A}$  est stable par combinaisons linéaires et contient  $A$  et  $I_n$ ),  $A - \lambda I_n$  est non inversible (car  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ ) et n'est pas la matrice nulle (car  $A$  n'est pas scalaire), donc  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps.

(b) Supposons qu'il existe dans  $\mathbb{A}$  une matrice  $A$  trigonalisable (ou diagonalisable) non scalaire. Il existe donc une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\text{mat}(A, e)$  est triangulaire supérieure (ici  $A$  est identifié avec l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ ). Alors  $Ae_1$  est colinéaire à  $e_1$ , donc c'est un vecteur propre de  $A$ . D'après la question précédente,  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps.

(c) Soit  $A \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ . D'après la question II.1,  $\Phi_A : X \mapsto AX$  est un endomorphisme de  $\mathbb{A}$ . De plus,  $\mathbb{A}$  étant intègre et  $A$  étant non nulle,  $\text{Ker } \Phi_A = \{0\}$  donc  $\Phi_A$  est injectif. Comme  $\Phi_A$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que  $\Phi_A$  est un isomorphisme. En particulier,  $\Phi_A$  est surjective donc il existe  $B \in \mathbb{A}$  telle que  $\Phi_A(B) = I_n$ . La matrice  $A$  possède donc un inverse à droite, ce qui d'après le cours est suffisant pour assurer que  $A$  est inversible, d'inverse  $B$  appartenant à  $\mathbb{A}$ . Ainsi, tout élément non nul de  $\mathbb{A}$  possède un inverse dans  $\mathbb{A}$  donc  $\mathbb{A}$  est un corps.

## III. L'algèbre des quaternions

1. Comme  $A^2 = -I_n$ , on a  $(\det A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}^+$  donc  $n$  est pair.

2. Remarquons que  $(AB)^2 = A(BA)B = A(-AB)B = -A^2B^2 = -I_n$ ,  $BAB = -AB^2 = A$  et  $ABA = -A^2B = B$ . On en déduit que si  $M = tI_n + xA + yB + zAB$  et  $M' = t'I_n + x'A + y'B + z'AB$  sont deux éléments de  $\mathbb{H}$ , alors

$$MM' = (tt' - xx' - yy' - zz')I_n + (tx + xt' + yz' - zy')A + (ty' - xz' + yt' + zx')B + (tz' + xy' - yx' + zt')AB,$$

ce qui montre que  $\mathbb{H}$  est stable pour le produit ; De plus  $\mathbb{H}$  est un sous-espace vectoriel contenant  $I_n$ , donc  $\mathbb{H}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. D'après 2.,

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$$

4. (a) Si  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  sont tels que  $tI_n + xA + yB + zAB = 0$  alors

$$(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n = (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0$$

donc  $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$  ce qui, vu que  $t, x, y, z$  sont réels impose  $t = x = y = z = 0$ . La famille  $(I_n, A, B, AB)$  est donc libre.

- (b) Soit  $M$  est un élément non nul de  $\mathbb{H}$ . Il existe  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  tel que

$$M = tI_n + xA + yB + zAB. \text{ D'après la question III.3,}$$

$$(tI_n + xA + yB + zAB) \times \frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} (tI_n - xA - yB - zAB) = I_n, \text{ donc } M \text{ est}$$

$$\text{inversible d'inverse } \frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} (tI_n - xA - yB - zAB) \in \mathbb{H}.$$

Ceci prouve que  $\mathbb{H}$  est un corps.

5. (a) On a  $J^2 = -I_2$  et d'après les règles de calcul des produits de matrices par blocs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = -I_4, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = -I_4$$

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = 0$$

6.  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA = (-B)(-A) = BA = -AB$ , donc  $A, B$  et  $C = AB$  sont antisymétriques,. Ainsi, lorsque  $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$ ,  ${}^tM = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}$  et d'après la question III.3,  $M {}^tM = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_4$ . On en déduit donc que  $(\det M)^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^4$ . Ainsi, lorsque  $M \neq 0$ , d'après la question III.4.b,

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\det {}^tM|}} {}^tM.$$

## IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. Si  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  et  $M = tI_n + xA + yB + zC$ ,  $M + {}^tM = 2tI_n$  donc  $M = -{}^tM$  si et seulement si  $t = 0$  ou encore  $M \in \text{vect}\{A, B, C\}$ . Or  $(A, B, C)$  est une famille libre en tant que sous-famille de la famille libre  $(I_4, A, B, C)$ . Donc l'ensemble des quaternions purs est le sous-espace vectoriel de dimension 3 admettant pour base  $(A, B, C)$ .

$\mathbb{L}$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathbb{H}$  car, par exemple  $A \times A = -I_2 \notin \mathbb{L}$  alors que  $A \in \mathbb{L}$ .

2. Soit  $M = xA + yB + zC$  et  $N = x'A + y'B + z'C$  deux éléments de  $\mathbb{L}$ . Comme  $(A, B, C)$  est une base orthonormée pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ , on a  $(M|N) = xx' + yy' + zz'$ . Par ailleurs, d'après III.3.,

$$\begin{aligned} MN + NM &= (-xx' - yy' - zz')I_4 + (yz' - zy')A + (-xz' + zx')B + (xy' - yx')C \\ &\quad + (-x'x - y'y - z'z)I_4 + (y'z - z'y)A + (-x'z + z'x)B + (x'y - y'x)C \\ &= -2(xx' + yy' + zz')I_4 \end{aligned}$$

On a donc  $\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4$ .

3.  $\diamond$  Si  $M \in \mathbb{L}$ , d'après la relation précédente,  $M^2 = \lambda I_4$  avec  $\lambda = -\|M\|^2 \in \mathbb{R}^-$ .  
 $\diamond$  Réciproquement, supposons que  $M \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{L}$ .  
Alors il existe  $t \in \mathbb{R}$  et  $N \in \mathbb{L}$  tels que  $M = tI_4 + N$ .  
Alors  $M^2 = t^2I_4 + 2tN + N^2 = (t^2 - \|N\|^2)I_4 + 2tN$ .  
Si  $N \neq 0$  alors  $N \notin \mathbb{R}I_4$  (sinon  $N^2 \in \mathbb{R}_+^*I_4$ , ce qui est faux d'après le sens direct), donc  $M^2 \notin \mathbb{R}I_4$ .  
Si  $N = 0$ , alors  $M^2 = t^2I_4 \notin \mathbb{R}_-I_4$ .  
On a ainsi montré que, pour tout  $M \in \mathbb{H}$ ,  $M \in \mathbb{L} \iff M^2 \in \mathbb{R}_-I_4$ .
4. Soit  $M \in \mathbb{L}$  : on a  $M^2 = -\|M\|^2I_4$  donc  $\varphi(M)^2 = \varphi(M^2) = -\|M\|^2\varphi(I_4) = -\|M\|^2I_4$ .  
On en déduit d'après la question précédente que  $\varphi(M) \in \mathbb{L}$ . On peut alors appliquer la question précédente à  $\varphi(M)$  :  $\varphi(M)^2 = -\|\varphi(M)\|^2I_4$  donc  $-\|\varphi(M)\|^2 = -\|M\|^2$  soit  $\|\varphi(M)\| = \|M\|$ .  
Donc  $\varphi$  transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme.  
L'endomorphisme induit par  $\varphi$  sur  $\mathbb{L}$  conserve la norme donc c'est un endomorphisme orthogonal de  $\mathbb{L}$ .

5. On suppose que  $M$  et  $N$  sont deux quaternions purs de même norme.

(a) Supposons que  $M$  et  $N$  sont colinéaires.

Si  $M \neq 0$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $N = \lambda M$ , donc si l'on note  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $M$  dans la base  $(A, B, C)$ ,  $\|M\|^2 = \|N\|^2 = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda^2\|M\|^2$  et  $\|M\| \neq 0$ . Ainsi,  $\lambda^2 = 1$ , puis  $\lambda = \pm 1$ . Ceci démontre que  $N = \pm M$ , et c'est encore vrai lorsque  $M = 0$ .

$\diamond$  Si  $M = N$  la matrice  $P = I_4$  vérifie  $P \in \mathbb{H}$ ,  $P \neq 0$  et  $M = P^{-1}NP$ .

$\diamond$  Si  $N = -M$  la condition  $M = P^{-1}NP$  équivaut à  $PM + MP = 0$ . Dans ces conditions, d'après la formule de la question 2, il suffit de prendre pour  $P$  une matrice non nulle de  $\mathbb{L}$  orthogonale à  $M$  dans  $\mathbb{L}$ , s'il existe une telle matrice  $P$ .

Si l'on note  $(a, b, c)$  et  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $M$  et de  $P$  dans la base  $(A, B, C)$ , cela revient à montrer qu'il existe  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tel que  $ax + by + cz = 0$ . C'est évident lorsque  $M = 0$  et sinon cela revient à montrer que le plan de  $\mathbb{L}$  d'équation  $ax + by + cz = 0$  contient un vecteur non nul, ce qui est connu.

(b)  $M$  et  $N$  sont deux quaternions purs non colinéaires de même norme, donc

$M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = (-\|M\|^2I_4)N - M(-\|N\|^2I_4) = \|M\|^2(M - N)$ .  
On a donc  $M(MN - \|M\|^2I_4) = (MN - \|M\|^2I_4)N$ . Dans ces conditions, si on pose  $P = MN - \|M\|^2I_4$ , on a  $MP = PN$  avec  $P \in \mathbb{H}$ . De plus,  $P \neq 0$  car sinon on aurait  $MN = \|M\|^2I_4 = -M^2$  ou encore  $M(N + M) = 0$  donc  $M + N = 0$  ( $M$  est inversible car élément non nul de  $\mathbb{H}$ ) ce qui est contradictoire avec le fait que la famille  $(M, N)$  soit libre. Comme  $P$  est un élément non nul de  $\mathbb{H}$ ,  $P$  est inversible et  $M = PNP^{-1}$ .

6.  $\diamond$  Telle qu'elle est formulée cette question est incorrecte; en effet, sous la seule condition d'être non nulle et de vérifier  $MP = PN$  une matrice  $P = \alpha I_4 + Q$  avec  $Q \in \mathbb{L}$  n'est pas

nécessairement telle que  $Q$  soit orthogonale à  $M$  et  $N$ . À titre de contre-exemple, prenons  $M = A$ ,  $N = B$ ,  $Q = A + B$  et  $P = Q = 0 \times I_4 + Q$ .  $M$  et  $N$  sont bien de même norme. De plus  $PM = (A + B)A = -I_4 + BA = B(A + B) = NP$ ,  $P \neq 0$ , mais  $(Q|M) = (A + B|A) = 1 \neq 0$ .

◇ Par contre, pour la matrice  $P$  mise en évidence dans chacun des 3 cas envisagés, on a bien la propriété souhaitée. En effet, dans le cas où  $M = N$ , on a choisi  $P = I_4$  soit  $Q = 0$  qui est orthogonale à  $M = N$ , si  $M = -N$ , on a choisi  $P = 0I_4 + Q$  avec  $Q$  orthogonale à  $M$  et  $N$ .

Enfin, lorsque  $M$  et  $N$  sont linéairement indépendantes, posons  $P = MN - \|M\|^2 I_4 = \alpha I_4 + Q$  avec  $Q \in \mathbb{L}$ . Alors  ${}^t Q = -Q$ , donc  $Q = \frac{1}{2}(Q - {}^t Q) = \frac{1}{2}(MN - NM)$ ,

car  ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M = (-N)(-M) = NM$ . D'après la formule de la question 2,

$$-4(Q|M)I_4 = (MN - NM)M + M(MN - NM) = -NM^2 + M^2N = 0 \text{ car } M^2 = -\|M\|^2 I_4.$$

Ainsi  $Q$  est orthogonale à  $M$  et de même, on montre que  $Q$  est orthogonale à  $N$ .

7. ◇ Remarquons tout d'abord que pour tout  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ , l'application  $\varphi_P$  de  $\mathbb{H}$  dans lui-même qui à  $M$  associe  $P^{-1}MP$  est un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$ . En effet,  $\varphi_P$  est bien une application de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{H}$  puisque  $\mathbb{H}$  est un corps,  $\varphi_P$  est linéaire par bilinéarité du produit dans  $\mathbb{H}$ ,  $\varphi_P(I_4) = P^{-1}I_4P = I_4$  et  $\varphi_P(M)\varphi_P(N) = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) = P^{-1}MNP = \varphi_P(MN)$  pour tout couple  $(M, N) \in \mathbb{H}^2$ . Enfin,  $\varphi_P$  est bien bijective, de bijection réciproque égale à  $\varphi_{P^{-1}}$ . Les isomorphismes  $\varphi_P$  s'appellent les automorphismes intérieurs de l'algèbre  $H$ .

◇ Réciproquement, soit  $\varphi$  un automorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$ . Il s'agit de montrer qu'il existe  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  tel que, pour tout  $M \in \mathbb{H}$ ,  $\varphi(M) = P^{-1}MP$  (ce qui prouvera que les seuls automorphismes de l'algèbre  $\mathbb{H}$  sont ses automorphismes intérieurs). Pour cela, il suffit de trouver  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  telle que  $AP - P\varphi(A) = 0 = BP - P\varphi(B)$ . En effet, dans ces conditions,  $\varphi(C) = \varphi(A)\varphi(B) = P^{-1}(AB)P = P^{-1}CP$ , puis pour tout  $M = tI_4 + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$ ,  $\varphi(M) = tI_4 + xP^{-1}AP + yP^{-1}BP + zP^{-1}CP = P^{-1}MP$ .

**Premier cas.** Etudions tout d'abord le cas où  $\varphi(A) = A$ . On recherche donc  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  telle que  $P^{-1}AP = A$  et  $P^{-1}BP = \varphi(B)$ . D'après 4., on sait que  $\varphi(B)$  est un quaternion pur de norme 1 et orthogonal à  $\varphi(A) = A$  donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi(B) = \cos \theta B + \sin \theta C$ . La question 6 nous incite à chercher  $P$  sous la forme  $P = \alpha I_4 + \beta A$ . Dans ces conditions,  $P$  commute avec  $A$  donc  $P^{-1}AP = A$  et

$$\begin{aligned} BP - P\varphi(B) &= \alpha B - \beta C - (\alpha I_4 + \beta A)(\cos \theta B + \sin \theta C) \\ &= (\alpha(1 - \cos \theta) + \beta \sin \theta)B - (\beta(1 + \cos \theta) + \alpha \sin \theta)C, \end{aligned}$$

donc on cherche  $(\alpha, \beta)$  non nul et solution de 
$$\begin{cases} \alpha(1 - \cos \theta) + \beta \sin \theta = 0 \\ \alpha \sin \theta + \beta(1 + \cos \theta) = 0 \end{cases},$$

$$\text{or } \alpha(1 - \cos \theta) + \beta \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} (\alpha \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2})$$

$$\text{et } \alpha \sin \theta + \beta(1 + \cos \theta) = 2 \cos \frac{\theta}{2} (\alpha \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2}),$$

donc  $(\alpha, \beta) = (\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2})$  convient. Ainsi, en posant  $P = \cos \frac{\theta}{2} I_4 - \sin \frac{\theta}{2} A$ , on a alors  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ,  $P^{-1}AP = A = \varphi(A)$  et  $P^{-1}BP = \varphi(B)$  et donc,  $\forall M \in \mathbb{H}$ ,  $\varphi(M) = P^{-1}MP$ .

**Cas général.** Soit  $\varphi$  un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$ . Alors, d'après 4, on sait que  $\varphi(A)$  est un quaternion pur de même norme que  $A$  donc d'après 5, il existe  $Q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  telle que  $A = Q^{-1}\varphi(A)Q$ . Si  $\varphi_Q$  désigne l'application de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{H}$  telle que  $\varphi_Q(M) = Q^{-1}MQ$ , alors  $\varphi_Q \circ \varphi$  est un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$  tel que  $\varphi_Q \circ \varphi(A) = A$  donc d'après le premier cas étudié, il existe  $R \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  tel que pour tout  $M$  de  $\mathbb{H}$ ,  $\varphi_Q \circ \varphi(M) = R^{-1}MR$ . En posant  $P = RQ^{-1}$ , on a  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  et pour tout  $M$  de  $\mathbb{H}$ ,  $\varphi(M) = P^{-1}MP$ .