

# DM 63

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni le vendredi 19 juin.

## Concours Centrale-Supélec Mathématiques II MP 2011

### Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note :

- $\llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $1 \leq k \leq n$  ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ) l'espace vectoriel des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes) à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  ; on dit que  $A$  est positive (respectivement définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0 \quad (\text{respectivement } {}^tXAX > 0 \text{ si } X \neq 0).$$

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté  $\mathbb{R}[X]$ , et, pour tout entier naturel  $p$ , le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  est noté  $\mathbb{R}_p[X]$ .

### Objectifs

La première partie a pour but de démontrer une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives, à l'aide des déterminants de certaines matrices extraites.

La deuxième partie aborde l'étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini à l'aide d'une intégrale.

La troisième partie introduit les matrices de HILBERT et leur inverse, dont certaines propriétés sont étudiées dans la partie IV.

## I — Caractérisation des matrices symétriques définies positives

I.A - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

I.A.1) Montrer que  $A$  est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

I.A.2) Montrer que  $A$  est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

I.B - Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A^{(i)}$  la matrice carrée d'ordre  $i$  extraite de  $A$ , constituée par les  $i$  premières lignes et les  $i$  premières colonnes de  $A$ .

Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A^{(i)}) > 0.$$

- I.B.1) Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A$  est définie positive.  
 Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , montrer que la matrice  $A^{(i)}$  est définie positive et en déduire que  $\det(A^{(i)}) > 0$ .  
 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on dira qu'une matrice  $A$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}_n$  si  $\det(A^{(i)}) > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- I.B.2) Dans les cas particuliers  $n = 1$  et  $n = 2$ , montrer directement que toute matrice  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_n$  est définie positive.
- I.B.3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que toute matrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_n$  est définie positive. On considère une matrice  $A$  de  $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$  vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  et on suppose par l'absurde que  $A$  n'est pas définie positive.
- Montrer alors que  $A$  admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.
  - En déduire qu'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$  dont la dernière composante est nulle et tel que  ${}^t X A X < 0$ .
  - Conclure.

I.C - Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A^{(i)}) \geq 0 ?$$

## II — Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

II.A - Montrer que l'application  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

II.B - On note  $P_n^{(n)}$  le polynôme dérivé  $n$  fois de  $P_n$ .  
 Déterminer le degré de  $P_n^{(n)}$  et calculer  $P_n^{(n)}(1)$ .  
 On définit la suite de polynômes  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \frac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)} \end{cases}$$

II.C - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que, pour tout  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $\langle Q, L_n \rangle = 0$ .

*Indication : on pourra intégrer par parties.*

II.D -

II.D.1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 P_n(u)du$ . Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $I_n$ .

II.D.2) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la relation :  $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{1}{2n+1}$ .

II.E - Déterminer une famille de polynômes  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- i. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le degré de  $K_n$  vaut  $n$  et son coefficient dominant est strictement positif;
  - ii. pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $(K_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}_N[X]$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- Justifier l'unicité d'une telle famille.

II.F - Calculer  $K_0, K_1$  et  $K_2$ .

### III — Matrices de HILBERT

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la matrice  $H_n$  par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où  $(H_n)_{i,j}$  désigne le coefficient de place  $(i, j)$  de la matrice  $H_n$ . On note de plus

$$\Delta_n = \det(H_n).$$

III.A - Étude de quelques propriétés de  $H_n$

III.A.1) Calculer  $H_2$  et  $H_3$ . Montrer que ce sont des matrices inversibles et déterminer leur inverse.

Dans les questions suivantes de III.A, on désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

III.A.2) Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \Delta_n.$$

*Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de  $\Delta_{n+1}$  à toutes les autres.*

III.A.3) En déduire l'expression de  $\Delta_n$  en fonction de  $n$  (on fera intervenir les

quantités  $c_m = \prod_{i=1}^{m-1} i!$  pour des entiers  $m$  adéquats).

III.A.4) Prouver que  $H_n$  est inversible, puis que  $\det(H_n^{-1})$  est un entier.

III.A.5) Démontrer que  $H_n$  admet  $n$  valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement positives.

III.B - Approximation au sens des moindres carrés

On note  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On convient d'identifier l'espace  $\mathbb{R}[X]$  au sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  constitué des fonctions polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ; ainsi, pour tout entier naturel  $i$ , le polynôme  $X^i$  est confondu avec la fonction polynomiale définie par :  $X^i(t) = t^i$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

On étend à  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de la partie II en posant :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}))^2, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .)

On note  $\|\cdot\|$  la norme associée à ce produit scalaire : pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , on a donc :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

III.B.1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$\|\Pi_n - f\| = \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|.$$

III.B.2) Montrer que la suite  $(\|\Pi_n - f\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

III.B.3) Montrer que  $H_n$  est la matrice du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  restreint à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

En déduire que  $H_n = {}^t P^{-1} P^{-1}$ , où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  vers la base  $(K_0, \dots, K_{n-1})$ .

III.B.4) Calculer les coefficients de  $\Pi_n$  à l'aide de la matrice  $H_{n+1}^{-1}$  et des réels  $\langle f, X^i \rangle$ .

III.B.5) Déterminer explicitement  $\Pi_2$  lorsque  $f$  est la fonction définie pour tout  $t \in [0, 1]$  par :  $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ .

## IV — Propriétés des coefficients de $H_n^{-1}$

IV.A - Somme des coefficients de  $H_n^{-1}$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $h_{i,j}^{(-1,n)}$  le coefficient de place  $(i, j)$  de la matrice  $H_n^{-1}$  et on désigne par  $s_n$  la somme des coefficients de la matrice  $H_n^{-1}$ , c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

IV.A.1) Calculer  $s_1, s_2$  et  $s_3$ . Conjecturer de manière générale la valeur de  $s_n$  en fonction de  $n$ .

IV.A.2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Montrer qu'il existe un unique  $n$ -uplet de nombres réels  $(a_p^{(n)})_{0 \leq p \leq n-1}$  vérifiant le système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_0^{(n)} + \frac{a_1^{(n)}}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n} = 1 \\ \frac{a_0^{(n)}}{2} + \frac{a_1^{(n)}}{3} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} = 1 \\ \vdots \\ \frac{a_0^{(n)}}{n} + \frac{a_1^{(n)}}{n+1} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} = 1 \end{cases}$$

b) Montrer que  $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$ .

On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $S_n$  par  $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}X + \dots + a_{n-1}^{(n)}X^{n-1}$ . Dans les questions suivantes de IV.A, on désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

IV.A.3) Montrer que :

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

IV.A.4) Exprimer  $s_n$  à l'aide de la suite de polynômes  $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définie à la question II.E.

IV.A.5) Pour tout  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , calculer  $K_p(1)$ .

IV.A.6) Déterminer la valeur de  $s_n$ .

IV.B - Les coefficients de  $H_n^{-1}$  sont des entiers

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\binom{n}{k}$  le coefficient binomial  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

IV.B.1) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\binom{2p}{p}$  est un entier pair.

En déduire que, si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors  $\binom{n+p}{p} \binom{n}{p}$  est un entier pair.

IV.B.2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que l'on peut écrire :  $K_n = \sqrt{2n+1} \Lambda_n$  où  $\Lambda_n$  est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera. Parmi les coefficients de  $\Lambda_n$ , lesquels sont pairs ?

IV.B.3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Calculer  $h_{i,i}^{(-1,n)}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ; on donnera en particulier une expression très simple de  $h_{1,1}^{(-1,n)}$  et  $h_{n,n}^{(-1,n)}$  en fonction de  $n$ .

b) Calculer  $h_{i,j}^{(-1,n)}$  pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ; en déduire que les coefficients de  $H_n^{-1}$  sont des entiers.

c) Montrer que  $h_{i,j}^{(-1,n)}$  est divisible par 4 pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$ .