

## I-Characterisation des matrices symétriques définies positives

## — I-A.1.2 :

◇ Supposons que  $A$  est positive (resp : définie positive).

Soit  $\lambda \in Sp(A)$ , alors  $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul tel que  $AX = \lambda X$ , donc  ${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$ , or  $\|X\|^2 > 0$ , donc  $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ .

Si  $A$  est positive, alors  $\lambda \geq 0$  et si  $A$  est définie positive, on aura  $\lambda > 0$ .

Réciproquement, supposons que  $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$  (respectivement :  $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ ) :  $A$  étant symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable d'après le théorème spectral, donc il existe  $P \in O_n$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

telles que  $A = PD^tP = PDP^{-1}$ , donc  $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tXAX = {}^t(PX)D({}^tPX) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$  où on a posé

$${}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ De plus } \{\lambda_i / i \in \{1, \dots, n\}\} = Sp(D) = Sp(A).$$

Donc : si  $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ , alors  ${}^tXAX \geq 0$  et si  $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ , alors vu que  $X$  est non nul et que  ${}^tP$  est inversible,  ${}^tPX$  est aussi non nul, donc il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $y_j \neq 0$ , et par suite  ${}^tXAX \geq \lambda_j y_j^2 > 0$ . On a ainsi le résultat demandé.

— I-B.1 : Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$  que nous supposons définie positive et soit  $X_i \in M_{i,1}(\mathbb{R})$  non nul, alors en posant

$X = \begin{pmatrix} X_i \\ O \end{pmatrix}$  où  $O \in M_{n-i,1}(\mathbb{R})$ , on aura par produit de matrices par blocs :  ${}^tX_i A^{(i)} X_i = {}^tXAX > 0$ , donc  $A^{(i)}$  est définie positive pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

— On déduit donc que  $\det(A^{(i)}) = \prod_{k=1}^i \mu_k > 0$  où  $\mu_1, \dots, \mu_i$  sont les valeurs propres de  $A^{(i)}$  qui sont strictement positifs.

## — I-B.2 :

— Cas  $n = 1$

Soit  $A = (a)$  tel que  $a > 0$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $ax^2 > 0$ , donc  $A$  est définie positive.

— Cas  $n = 2$

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  tel que  $a > 0$  et  $ac - b^2 > 0$ . Notons  $\lambda$  et  $\mu$  les valeurs propres de  $A$ .

Ainsi  $ac \geq b^2 \geq 0$ , donc  $a$  et  $c$  ont le même signe, or  $a > 0$ , donc  $\lambda + \mu = \text{Tr}(A) = a + c > 0$ . De plus  $\lambda\mu = ac - b^2 > 0$ , donc  $\lambda$  et  $\mu$  ont le même signe, qui est donc celui de leur somme, donc  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ , ce qui entraîne d'après I - A.2, que  $A$  est définie positive.

— I-B.3 : Soit  $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  $\det(A^{(i)}) > 0$ . On suppose que  $A$  n'est pas définie positive. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  les valeurs propres de  $A$ , comptées avec multiplicités. Il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  $Ae_i = \lambda_i e_i$ .

— (a) : D'après I - A.2, il existe  $j$  tel que  $\lambda_j \leq 0$ , mais si  $\lambda_j = 0$  alors  $\det(A) = \det(A^{(n+1)}) = 0$  ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi  $\lambda_j < 0$ .

$\det(A) > 0$  donc  $\prod_{i \neq j} \lambda_i < 0$ , donc il existe  $k$  tel que  $\lambda_k < 0$ . Alors  $e_j$  et  $e_k$  sont deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à  $\lambda_j$  et  $\lambda_k$  respectivement.

— (b) : Soient  $V_1, V_2 \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$  des vecteurs propres orthonormaux associés aux deux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  strictement négatives de la question précédente. Notons  $a, b$  les dernières composantes de  $V_1$  et  $V_2$  respectivement.

Si  $ab = 0$ , alors l'un des deux vecteurs répond à la question, on obtient  ${}^tV_1AV_1 = \lambda_1 \|V_1\|^2 = \lambda_1 < 0$  ou  ${}^tV_2AV_2 = \lambda_2 \|V_2\|^2 = \lambda_2 < 0$ .

Si  $ab \neq 0$ . La dernière composante du vecteur  $V = bV_1 - aV_2$  est nulle et

on a alors  ${}^tVAV = \langle V, AV \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle bV_1 - aV_2, b\lambda_1 V_1 - a\lambda_2 V_2 \rangle$ , or  $V_1$  et  $V_2$  sont orthogonaux, donc  ${}^tVAV = b^2\lambda_1 + a^2\lambda_2 < 0$ .

On conclut donc à l'existence d'un vecteur  $X \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$  de dernière composante nulle qui vérifie  ${}^tXAX < 0$ .

— (c) : Posons  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ O \end{pmatrix} \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$  tel que  $X_1 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a  ${}^tXAX = {}^tX_1 A^{(n)} X_1 < 0$ , ce qui contredit le fait que  $A^{(n)}$  est définie positive.

— I-C : On a clairement équivalence lorsque  $n = 1$ .

Lorsque  $n \geq 2$ , l'implication directe est toujours vraie mais la réciproque est fautive grâce à l'exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 dans lequel on a  $\det(A^{(i)}) = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , mais  $S_p(A) = \{0, -1\}$ ,  
 donc  $A$  n'est pas définie positive.

## II-Étude d'une suite de polynômes

— **II-A** : On vérifie que  $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$  et  $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ , donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire et symétrique. De plus  $\langle P, P \rangle \geq 0$ , et si  $\langle P, P \rangle = 0$ , alors  $t \mapsto P(t)^2$  est positive, continue et d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ , donc pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $P(t) = 0$ , donc  $P$  est nul car c'est un polynôme possédant une infinité de racines.

Ainsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bien un produit scalaire.

— **II-B** : On a  $\deg(P_n) = 2n$ , donc  $\deg(P_n^{(n)}) = 2n - n = n$ .

Au voisinage de 1 on a  $P_n \sim (X - 1)^n$ , donc  $P_n = (X - 1)^n + o((X - 1)^n)$ , ce qui entraîne d'après la formule de Taylor-Young que  $\frac{P_n^{(n)}(1)}{n!} = 1$ , donc  $P_n^{(n)}(1) = n!$ .

— **II-C** : Intégrons par parties :  $n! \langle Q, L_n \rangle = \int_0^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)dt = [Q(t)P_n^{(n-1)}(t)]_0^1 - \int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$ ,  
 or 0 et 1 sont racines de  $P_n$  de multiplicités  $n$ ,

donc  $P_n^{(n-1)}(0) = P_n^{(n-1)}(1) = 0$ , donc  $n! \langle Q, L_n \rangle = - \int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$ .

En effectuant des intégrations par parties successives, on montre par récurrence que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $n! \langle Q, L_n \rangle = (-1)^k \int_0^1 Q^{(k)}(t)P_n^{(n-k)}(t)dt$ .

En particulier, avec  $k = n$ , on obtient  $n! \langle Q, L_n \rangle = (-1)^n \int_0^1 Q^{(n)}(t)P_n(t)dt$  mais lorsque  $\deg(Q) \leq n - 1$ , on a  $Q^{(n)} = 0$ , donc  $\langle Q, L_n \rangle = 0$ .

— **II-D.1** : Une succession d'intégrations par parties donne

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^1 x^n(x-1)^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1}(x-1)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{n+1} x^{n+1}(x-1)^{n-1} dx \\
 &= -\frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1} dx = \dots = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \int_0^1 x^{n+k}(x-1)^{n-k} dx, \\
 \text{soit pour } k = n : I_n &= \int_0^1 x^n(x-1)^n dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_0^1 x^{2n} dx, \text{ donc } I_n = \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}$$

— **II-D.2** : Le début du calcul du II.C dans lequel on remplace  $Q$  par  $L_n = \frac{1}{n!}P_n^{(n)}$  donne :

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int_0^1 P_n^{(2n)} P_n, \text{ or } P_n^{(2n)} = (2n)!,$$

$$\text{donc } \langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} I_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}.$$

— **II-E** :

$\diamond$  On a  $\forall n > m$ ,  $L_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , donc d'après la question II-C,  $\langle L_n, L_m \rangle = 0$ .

De plus d'après la question précédente  $\|L_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ . Ce qui entraîne que si on pose

$K_n = \frac{L_n}{\|L_n\|} = \sqrt{2n+1}L_n$ , alors la famille  $(K_n)$  répond à la question, sachant que le coefficient dominant de  $K_n$  est  $\sqrt{2n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} > 0$ .

$\diamond$  Supposons que  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une seconde famille de polynômes vérifiant  $i)$  et  $ii)$ .

$Q_0$  est un polynôme constant de norme 1 et strictement positif, tout comme  $K_0$ , donc  $Q_0 = K_0$ .

Fixons  $N \in \mathbb{N}^*$ . La famille  $(Q_n)_{0 \leq n \leq N-1}$  est une famille orthonormée incluse dans  $\mathbb{R}_{N-1}[X]$  de cardinal  $N$ , donc c'est une base de  $\mathbb{R}_{N-1}[X]$ . Or  $Q_N$  est orthogonal à  $Q_0, \dots, Q_{N-1}$ , donc  $Q_N \in \mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$  et de même,  $K_N \in \mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$ , or  $\mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$  est l'orthogonal de  $\mathbb{R}_{N-1}[X]$  en considérant  $\mathbb{R}_N[X]$  comme l'espace global, donc  $\dim(\mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]) = \dim(\mathbb{R}_N[X]) - \dim(\mathbb{R}_{N-1}[X]) = 1$ . Ainsi  $Q_N$  et  $K_N$  sont tous deux sur une même droite vectorielle, donc il existe  $\alpha$  tel que  $Q_N = \alpha K_N$ . Mais  $Q_N$  et  $K_N$  sont de norme 1, donc  $|\alpha| = 1$ . De plus les coefficients dominants de  $K_N$  et  $Q_N$  sont strictement positifs, donc  $\alpha = 1$ . Ainsi,  $Q_N = K_N$  et l'on a prouvé l'unicité.

— **II-F** :  $L_0 = 1$ ,  $L_1 = 2X - 1$ ,  $L_2 = 6X^2 - 6X + 1$  ce qui donne  $K_0 = 1$ ,  $K_1 = \sqrt{3}(2X - 1)$  et  $K_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$ .

**III-Matrices de Hilbert.**

— **III-A.Étude de quelques propriétés de  $H_n$ .**

— **III-A.1 :**  $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

— **III-A.2 :** Soit la fraction définie par  $F(X) = \alpha \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{a_2}{X+2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{X+n+1}$ , avec pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  $a_k$  le résidu associé au pôle simple  $-k$  donné par

$$a_k = \alpha \frac{-k(-k-1)\dots(-k-n+1)}{\prod_{\substack{j \neq k \\ 1 \leq j \leq n+1}} (-k+j)} = (-1)^{n-k+1} \alpha \frac{(n-1+k)!}{((k-1)!)^2(n+1-k)!}.$$

On choisit  $\alpha$  tel que  $a_{n+1} = \alpha \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 1$ , c'est à dire  $\alpha = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

L'opération élémentaire sur les colonnes de  $\Delta_{n+1}$  donnée par  $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k C_k$  amène à

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} & & F(0) \\ \Delta_n & & F(1) \\ & & \vdots \\ * & \dots & * & F(n) \end{vmatrix}, \text{ or } F(0) = F(1) = \dots = F(n-1) = 0,$$

donc  $\Delta_{n+1} = F(n)\Delta_n = \alpha \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \Delta_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \Delta_n$ .

— **III-A.3 :** La relation de récurrence précédente conduit à  $\Delta_n = \frac{((n-1)!(n-2)! \dots 1!)^4}{(2n-1)!(2n-2)! \dots 3!2!} \Delta_1 = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$ .

— **III-A.4 :**

—  $\det(H_n) = \Delta_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

— La relation de récurrence  $\det(H_{n+1}^{-1}) = \frac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4} \det(H_n^{-1}) = (2n+1) \binom{2n}{n}^2 \det(H_n^{-1})$  nous invite à utiliser une récurrence simple.

Pour  $n = 1$ ,  $\det(H_1^{-1}) = 1 \in \mathbb{N}$  et si on suppose que  $\det(H_n) \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\det(H_{n+1}^{-1}) = (2n+1) \binom{2n}{n}^2 \det(H_n^{-1}) \in \mathbb{N}, \text{ ce qui établit la récurrence.}$$

— **III-A.5 :** Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(H_n^{(k)}) = \det(H_k) = \Delta_k > 0$ , et  $H_n$  est symétrique, donc d'après la question I - B, la matrice  $H_n$  est définie positive, de plus elle est diagonalisable, donc ses valeurs propres sont au nombre de  $n$  et  $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}^{*+}$ .

— **III-B : Approximations au sens des moindres carrés.**

— **III-B.1 :**  $\mathbb{R}_n[X]$  est un sous espace vectoriel de  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  de dimension finie, donc le théorème de la projection orthogonale assure que pour tout  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , il existe  $p(f) = \Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$  la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} (\|Q - f\|) = d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|\Pi_n - f\|$ .

— **III-B.2 :**  $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ , donc  $\min_{Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} (\|Q - f\|) \geq \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} (\|Q - f\|)$ , c'est à dire  $\|\Pi_{n-1} - f\| \geq \|\Pi_n - f\|$  ce qui traduit la décroissance de la suite  $(\|\Pi_n - f\|)_n$ .

— **III-B.3 :**

◇ Posons  $e_k(X) = X^{k-1}$ , alors  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et on a

$\langle e_i, e_j \rangle = \int_0^1 e_i e_j = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1} = (H_n)_{i,j}$ , donc la matrice  $H_n$  est la matrice du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

◇ Soit  $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Ici, les lignes et colonnes de  $H_n$  sont numérotées de 0 à  $n-1$ .

$[H_n]_{i,j} = \langle X^i, X^j \rangle$ , or par définition de la matrice de passage  $P^{-1}$  de la base  $(K_0, \dots, K_{n-1})$  vers la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $X^i = \sum_{k=0}^{n-1} [P^{-1}]_{k,i} K_k$ , or la base  $(K_0, \dots, K_{n-1})$  est orthonormée,

donc  $[H_n]_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} [P^{-1}]_{k,i} [P^{-1}]_{k,j} = [{}^t P^{-1} P^{-1}]_{i,j}$ , ce qui montre que  $H_n = {}^t P^{-1} P^{-1}$ .

— **III-B.4** Posons  $\Pi_n = \sum_{j=0}^n a_j X^j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} X^{j-1}$ .

On sait que  $f - \Pi_n \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ , donc  $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \langle f - \Pi_n, X^{k-1} \rangle = 0$ , ce qui donne

$$\langle f, X^{k-1} \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} \langle X^{j-1}, X^{k-1} \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} (H_{n+1})_{k,j}, \text{ ce qui s'écrit } H_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, X^n \rangle \end{pmatrix}$$

$$\text{et par suite } \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1} \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, X^n \rangle \end{pmatrix}.$$

— **III-B.5** : On calcule  $\langle f, 1 \rangle = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Atan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\langle f, X \rangle = \int_0^1 \frac{t dt}{1+t^2} = [\frac{1}{2} \ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2)$  et  $\langle f, X^2 \rangle = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{(1+t^2) - 1}{1+t^2} dt = 1 - \frac{\pi}{4}$ , donc

$$\Pi_2 = [-\frac{75\pi}{2} - 90(-2 + \ln 2)]X^2 + 12[-15 + 3\pi + 8 \ln 2]X + 30 - \frac{21\pi}{4} - 18 \ln 2.$$

#### IV Propriétés des coefficients de $H_n^{-1}$

— **IV-A : Somme des coefficients de  $H_n^{-1}$**

— **IV-A.1** :  $s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 9$ , on conjecture que  $s_n = n^2$ .

— **IV-A.2.a** Le système en question est un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues dont la matrice est  $H_n$  qui est inversible, donc c'est un système de Cramer qui admet une solution unique.

— **IV-A.2.b** La solution unique du système est donnée par  $\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = H_n^{(-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$a_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n h_{i+1,j}^{(-1,n)}, \text{ ce qui donne en sommant sur les } i, \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_{i-1}^{(n)} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} h_{i,j}^{(-1,n)} = s_n.$$

— **IV-A.3** puisque  $Q = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p X^p$ , on aura  $\langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \langle S_n, X^p \rangle$ , or en exploitant

pour tout  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la  $(p+1)$ ème ligne du système de la question IV - A.2 : (a), on obtient

$$\langle S_n, X^p \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \langle X^p, X^k \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^{(n)}}{p+k+1} = 1, \text{ ce qui entraîne que } \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p = Q(1).$$

— **IV-A.4** En prenant  $Q = S_n$  dans la relation précédente, on obtient  $(S_n, S_n) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n$ , puisque

$$(K_p)_{0 \leq p \leq n-1} \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ on a } (S_n, S_n) = \|S_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n, K_p \rangle^2, \text{ et tou-}$$

jours d'après la relation précédente avec  $Q = K_p$ , on aura  $\langle S_n, K_p \rangle = K_p(1)$ , ce qui donne finalement

$$s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2.$$

— **IV-A.5** : On a  $K_p = \sqrt{2p+1} L_p$  avec  $L_p(1) = 1$  on obtient  $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$ .

— **IV-A.6** :  $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = 2 \sum_{p=1}^{n-1} p + n = (n-1)n + n = n^2$ .

— **IV-B : Les coefficients de  $H_n^{-1}$  sont des entiers.**

— **IV-B.1** : Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\binom{2p}{p} = 2 \binom{2p-1}{p} \in 2\mathbb{N}$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}^*, p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\binom{n+p}{p} \binom{n}{p} = \frac{(n+p)!}{(p!)^2 (n-p)!} = \frac{(2p)!}{(p!)^2} \frac{(n+p)!}{(2p)!(n-p)!} = \binom{2p}{p} \binom{n+p}{2p} \in 2\mathbb{N}.$$

— **IV-B.2** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $K_n = \sqrt{2n+1} L_n$  avec  $L_n = \frac{1}{n!} (P_n^{(n)})$ ,

$$\text{or } (P_n)^{(n)} = (X^n (X-1)^n)^{(n)} = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{n+k} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k!} X^k,$$

ce qui donne  $L_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} X^k$ , donc le coefficient constant de  $L_n$  est égale à

$(-1)^n$  et tous les autres sont pairs grâce à la question précédente.

— **IV-B.3** :

—  $K_j = \sqrt{2j+1} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j+k}{k} \binom{j}{k} X^k$ , donc en notant  $P = (p_{i,j})$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  vers  $(K_0, \dots, K_{n-1})$ ,

pour tout  $i, j \in [[1, n]]$   $p_{i,j} = \sqrt{2j-1}(-1)^{j-i} \binom{j+i-2}{i-1} \binom{j-1}{i-1}$  si  $i \leq j$  et  $p_{i,j} = 0$  si  $i > j$ .

Or, d'après III.B.3,  $H_n^{-1} = P^t P$ , donc pour tout  $i \in [[1, n]]$

$$h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum_{j=i}^n p_{i,j}^2 = \sum_{j=i}^n (2j-1) \binom{j+i-2}{i-1}^2 \binom{j-1}{i-1}^2.$$

En particulier pour  $i = 1$  et  $i = n$ , on obtient  $h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$  et  $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n -$

$$1) \binom{2n-2}{n-1}^2.$$

— Pour tous  $i, j \in [[1, n]]$   $h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum_{k=\max(i,j)}^n p_{i,k} p_{j,k} =$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{k=\max(i,j)}^n (2k-1) \binom{k+i-2}{i-1} \binom{k-1}{i-1} \binom{k+j-2}{j-1} \binom{k-1}{j-1}$$

Ce qui montre que les  $h_{i,j}^{(-1,n)}$  sont des entiers comme produit d'entiers.

— Soient  $i, j \in [[2, n]]$ , donc pour tout  $k \geq \max(i, j) \geq 2$ ,  $i-1, j-1, k-1 \in \mathbb{N}^*$ , et par suite d'après (IV-B.1),  $\binom{k+i-2}{i-1} \binom{k-1}{i-1}$  et  $\binom{k+j-2}{j-1} \binom{k-1}{j-1}$  sont pairs, donc leur produit est un multiple de 4, ce qui entraîne que  $h_{i,j}^{(-1,n)}$  qui est somme de ces produits est aussi un multiple de 4.

\*\*\*\*\*