Résumé de cours :
Semaine 33, du 8 juin au 13 juin.

Espaces euclidiens (suite et fin)

1 Géométrie plane

Notation. E est un plan euclidien orienté dont $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $u_\alpha = \cos(\alpha)\vec{\imath} + \sin(\alpha)\vec{\jmath}$.

1.1 Le groupe orthogonal de degré 2

Propriété.
$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$. $O^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$ et $S_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix}$.

Formules : $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$, $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$, $S_\theta R_\varphi = S_{\theta-\varphi}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $S_\theta^{-1} = S_\theta$ et $S_\alpha^{-1} R_\theta S_\alpha = R_{-\theta}$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (SO(2), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array}$ est un morphisme surjectif de groupes. On en déduit que $(SO(2), \times)$ est un groupe commutatif.

Propriété. L'application $R_\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est un isomorphisme entre les groupes $(SO(2), \times)$ et $\mathbb{U}$.

1.2 Les isométries vectorielles du plan

Propriété. Soient $s \in O^-(E)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $mat(s, e) = S_\theta$. s est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}u_{\frac{\theta}{2}}$. Ainsi, les éléments de $O^-(E)$ sont les réflexions de E.

Définition. On suppose que E est orienté. Soit $r \in SO(E)$. La matrice R_θ de r dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas du choix de cette base. θ est appelé l'angle de la rotation r, déterminé à 2π près. Si on change d'orientation, cette mesure est changée en son opposé.

1.3 Angles

Notation. E désigne un plan euclidien orienté.

Définition. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. L'angle orienté des vecteurs x et y est l'angle de l'unique rotation qui transforme $\frac{x}{\|x\|}$ en $\frac{y}{\|y\|}$. $\cos\widehat{(x,y)} = \frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin\widehat{(x,y)} = \frac{\det(x,y)}{\|x\|\|y\|}$.

Propriété. Les x_i désignant des vecteurs non nuls de E, on a les formules suivantes :

- ⋄ Relation de Chasles : $\widehat{(x_1,x_2)} + \widehat{(x_2,x_3)} = \widehat{(x_1,x_3)}$.
- ⋄ $\widehat{(x_2,x_1)} = -\widehat{(x_1,x_2)}$.
- ⋄ $\widehat{(x_1,x_2)} = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_+x_2$ et $\widehat{(x_1,x_2)} = \pi \Longleftrightarrow \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_-x_2$.
- ⋄ Si r est une rotation, $(\widehat{r(x_1),r(x_2)}) = \widehat{(x_1,x_2)}$.
- ⋄ Si s est une réflexion, $(\widehat{s(x_1),s(x_2)}) = -\widehat{(x_1,x_2)}$.

Définition. E est un espace préhilbertien quelconque. L'angle non orienté ou écart angulaire des vecteurs $x,y \in E$ est $\widehat{(x,y)} = \arccos\left(\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0,\pi]$.

- — Lorsque $\widehat{(x,y)} \in]0,\frac{\pi}{2}[$, cet angle est dit aigu ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)} \in]\frac{\pi}{2},\pi[$, cet angle est dit obtus ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)} = \frac{\pi}{2}$ (i.e lorsque $x\perp y$), on dit que c'est un angle droit ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)} \in \{0,\pi\}$, on dit que c'est un angle plat :

1.4 Les droites affines du plan usuel

On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ euclidien orienté.

Propriété. Les droites affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux + vy + w = 0$, où $(u,v) \neq 0$.
Le vecteur de coordonnées (u,v) est orthogonal à la droite.
Les droites non parallèles à $\vec{\jmath}$ admettent une équation de la forme $y = px + q$, p étant appelé la pente de la droite.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0,y_0) et orthogonale au vecteur (u,v) a pour équation $u(x-x_0) + v(y-y_0) = 0$.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0,y_0) et dirigée par le vecteur (u,v) a pour équation $-v(x-x_0) + u(y-y_0) = 0 = \begin{vmatrix} u & x-x_0 \\ v & y-y_0 \end{vmatrix}$.

Propriété. La droite passant par les points (supposés distincts) de coordonnées (x_0,y_0) et (x_1,y_1) a pour équation $\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0$.

2 Géométrie dans l'espace

E est un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E. On dit que $\mathcal{E}$ est l'espace usuel. On fixe un repère de $\mathcal{E}$, noté $R = (O,e)$, où e une base orthonormée directe de E, notée $e = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ou $e = (e_1,e_2,e_3)$ selon les cas.

2.1 Le produit vectoriel (hors programme).

Définition. Si $a, b \in E$, $a \wedge b$ est l'unique vecteur de E tel que $\boxed{\forall x \in E \ \det(a, b, x) =< a \wedge b, x > .}$
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. L'application $(a, b) \longmapsto a \wedge b$ est bilinéaire et antisymétrique.

Propriété. Soit $(a, b) \in E^2$. (a, b) est un système lié si et seulement si $a \wedge b = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit a et b deux vecteurs indépendants entre eux.
Alors $a \wedge b$ est un vecteur orthogonal à a et b tel que $(a, b, a \wedge b)$ est une base directe de l'espace. De plus $\|a \wedge b\| = \|a\|\|b\| \sin \phi$, où ϕ est l'angle non orienté entre a et b.

Formule. *Identité de Lagrange :* Pour tout $(a, b) \in E^2$, $< a, b >^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2$.

Propriété. $e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Formule. Si $a = {}_e\left|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\right.$ et $b = {}_e\left|\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{matrix}\right.$ alors $a \wedge b = {}_e\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right.$.

Il faut savoir le démontrer.

2.2 Equation d'un plan

Propriété. Les plans affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux + vy + wz + t = 0$, où $(u, v, w) \neq 0$.
Le vecteur de coordonnées (u, v, w) est orthogonal (on dit aussi normal) au plan.
La direction du plan est le plan vectoriel d'équation $ux + vy + wz = 0$.

Propriété. Deux plans de $\mathcal{E}$ d'équations $ux+vy+wz+t = 0$ et $u'x+v'y+w'z+t' = 0$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') sont colinéaires, donc si et seulement si ${}_e\left|\begin{matrix}u\\ v\\ w\end{matrix}\right. \wedge {}_e\left|\begin{matrix}u'\\ v'\\ w'\end{matrix}\right. = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et orthogonal au vecteur (u, v, w) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dirigé par deux vecteurs indépendants de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix}x - x_0 & u & u'\\ y - y_0 & v & v'\\ z - z_0 & w & w'\end{vmatrix} = 0$.

2.3 Système d'équations d'une droite

Propriété. Une droite affine de $\mathcal{E}$ admet un système d'équations de la forme :
$\begin{cases} ux + vy + wz + t & = 0\\ u'x + v'y + w'z + t' & = 0\end{cases}$, où $ux + vy + wz + t = 0$ et $u'x + v'y + w'z + t' = 0$ sont les équations de deux plans affines non parallèles. Cette droite est dirigée par le vecteur ${}_e\left|\begin{matrix}u\\ v\\ w\end{matrix}\right. \wedge {}_e\left|\begin{matrix}u'\\ v'\\ w'\end{matrix}\right.$.

2.4 Le groupe orthogonal en dimension 3

Théorème. Réduction des matrices orthogonales :
On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Si $u \in O(E)$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{k_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix}$$

où $\tau_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ avec $\sin\theta_i \neq 0$ et $k_1 + k_2 + 2p = n$.

Notation. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On désigne par $r(\omega, \theta)$ l'unique rotation de E qui laisse invariant ω et qui induit sur le plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω, la rotation d'angle θ.

Propriété. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe une base orthonormée directe e de E telle que $\mathrm{mat}(r(\omega, \theta), e) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément, on peut choisir $e = (i, j, k)$ où (i, j) est une base orthonormée directe du plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω et où $k = \dfrac{\omega}{\|\omega\|}$.

Théorème. Si $r \in SO(E)$, il existe $\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $r = r(\omega, \theta)$.

Remarque. Si $r \in SO(E)$, on obtient ω tel que $r = r(\omega, \theta)$, en étudiant l'équation $r(x) = x$, c'est-à-dire en recherchant les vecteurs propres pour la valeur propre 1. De plus, $\boxed{\mathrm{Tr}(r) = 1 + 2\cos\theta}$.

Remarque. Soit $u \in O^-(E)$. $\det(-u) = (-1)^3 \det(u) = 1$, donc $-u \in SO(E)$.
Ainsi, on peut décrire géométriquement une isométrie indirecte, en déterminant
$\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $u = -r(\omega, \theta)$.

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on fixe deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives p et n, une application f de U dans F, où U est un ouvert de E, une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de F.

3 Dérivées partielles

Définition. Fixons $a \in U$ et $v \in E \setminus \{0\}$.
Si $t \longmapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, on dit que f est partiellement dérivable en a selon le vecteur v, et dans ce cas, la dérivée de $t \longmapsto f(a + tv)$ en 0 est appelée la dérivée partielle de f en a selon le vecteur v ; elle est notée $D_v f(a)$: $D_v f(a) = \Big(\dfrac{d}{dt}\big[f(a + tv)\big]\Big)(0)$.

Propriété. Pour tout $x \in U$, notons $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e'_i$. $D_v f(a)$ est définie si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $D_v f_i(a)$ est définie, et dans ce cas, $D_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_v f_i(a) e'_i$.

Propriété. Soient $g : U \longrightarrow F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si $D_v(f)(a)$ et $D_v(g)(a)$ sont définies, alors $D_v(\alpha f + \beta g)(a)$ est définie et $D_v(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha D_v(f)(a) + \beta D_v(g)(a)$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{R}$. Soit $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $D_v(f)(a)$ et $D_v(g)(a)$ sont définies, alors $D_v(fg)(a)$ est définie et $D_v(fg)(a) = g(a)D_v(f)(a) + f(a)D_v(g)(a)$.

Définition. Soit $j \in \mathbb{N}_p$. Si elle existe, on appelle $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en a la dérivée partielle de f en a selon le vecteur e_j. Dans ce cas, on la note $D_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

4 Différentielle

Définition. On dit que f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si il existe une application linéaire de E dans F, qui est alors unique et notée $df(a)$ telle que, lorsque $h \in E$ tend vers 0, $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(h)$. Dans ce cas, $df(a)$ est appelée la différentielle de f en a.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas, $d(f)(a).h = f'(a).h = h.f'(a)$ et $f'(a) = d(f)(a).1$.

Propriété. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Propriété. On suppose que f est différentiable en a. Alors pour tout $v \in E$, f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur v et $D_v f(a) = d(f)(a)(v)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si f est différentiable en a, alors $d(f)(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} dx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$,

Définition. Notons $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e'_i$. Si f est différentiable en a, on appelle matrice jacobienne de f en a, et on note $J_f(a)$, la matrice de $d(f)(a)$ dans les bases e et e'. Alors, $J_f(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$.

Définition. On dit que f est différentiable sur U lorsque, pour tout $a \in U$, f est différentiable en a. Dans ce cas, on dispose de la différentielle de f, notée $d\,f : U \longrightarrow L(E, F)$.

5 Cas des applications numériques

5.1 Le gradient

Notation. dans ce paragraphe, on suppose que $F = \mathbb{R}$.

Définition. Supposons que E est un espace euclidien et que f est différentiable en a. Il existe un unique vecteur de E, appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$ tel que : $\forall h \in E \quad < \nabla f(a))|h >= df(a)(h)$.
Si $e = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base **orthonormée** de E, $\nabla f(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)e_j$.
$-\nabla f(a)$ est la direction de plus grande pente.

5.2 Recherche des extrema

Définition. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, $a \in U$ est un point critique de f si et seulement si, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.

Théorème. Si f est différentiable et si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f.

6 Applications continûment différentiables

6.1 Définition

Définition. On dit que f est une application de classe C^1 sur U, ou qu'elle est continûment différentiable sur U si et seulement si f est différentiable et $d(f)$ est continue de U dans $L(E, F)$.

Théorème. f est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, l'application $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f est définie et continue de U dans F.

Propriété. f est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, l'application $D_v(f)$ est définie et continue.

Propriété. $\begin{array}{rccl} f : & U & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e'_i \end{array}$ est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, f_i est de classe C^1 sur U.

6.2 Exemples

Propriété. Si $f \in L(E, F)$, alors f est de classe C^1 et, pour tout $a \in E$, $d(f)(a) = f$.

Lemme : Si F, F' et F" sont trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et si $B : F \times F' \longrightarrow F"$ est une application bilinéaire continue, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in F \times F'$, $\|B(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$.

Propriété. Soient F' et F" deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $B : F \times F' \longrightarrow F"$ une application bilinéaire. Alors B est de classe C^1 et $d(B)(u, v)(h, h') = B(h, v) + B(u, h')$.
Il faut savoir le démontrer.

7 Composition

Théorème. Soit G un troisième $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m \in \mathbb{N}^*$ et V un ouvert de F.
Soient $\begin{array}{rccl} f : & U & \longrightarrow & V \\ & x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e'_i \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} g : & V & \longrightarrow & G \\ & y = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i & \longmapsto & g(y) \end{array}$ deux applications différentiables (resp : de classe C^1). Alors $g \circ f$ est différentiable (resp : de classe C^1) et , pour tout $a \in U$, on a $d(g \circ f)(a) = d(g)(f(a)) \circ d(f)(a)$ et $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule. Règle de la chaîne : $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a))$.

Propriété. Soient I un intervalle (non nécessairement ouvert) de $\mathbb{R}$, $\begin{array}{rccl} M: & I & \longrightarrow & U \\ & t & \longmapsto & \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(t)e_j \end{array}$ un arc paramétré dérivable (resp : de classe C^1) et $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable (resp : de classe C^1). Alors $f \circ M$ est un arc paramétré dérivable (resp : de classe C^1) à valeurs dans F.

De plus, $(f \circ M)'(a) = d(f)(M(a)).M'(a) = \sum_{j=1}^{p} M_j'(a) \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M(a))$.

Lorsque $F = \mathbb{R}$ et E est euclidien, on a aussi $(f \circ M)'(a) =< [\nabla f](M(a)) | M'(a) >$.

Remarque. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$, on peut écrire cette formule sous la forme suivante :

$$\forall a \in I \quad \frac{d\big[f(M_1(t), \ldots, M_p(t))\big]}{dt}(a) = \sum_{j=1}^{p} M_j'(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_1(a), \ldots, M_p(a)).$$

Propriété. Si U est convexe, f est constante si et seulement si f est de classe C^1 et $d(f) = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient $f : U \longrightarrow F$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications différentiables (resp : de classe C^1). Alors $\begin{array}{rccl} \varphi.f: & U & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \varphi(x).f(x) \end{array}$ est une application différentiable (resp : de classe C^1) et

$$\forall a \in U \ \ \forall h \in U \ \ d(\varphi.f)(a).h = [d\varphi(a).h].f(a) + [\varphi(a)].[d(f)(a).h].$$

8 Un peu de géométrie différentielle

8.1 Vecteurs tangents

Définition. Soit X une partie de E et x un point de X. Soit v un vecteur de E.
On dira que v est un vecteur tangent à X en x si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré $M :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$ dérivable en 0 tel que $x = M(0)$ et $v = M'(0)$.
En résumé, lorsque $v \neq 0$, v est tangent à X en x si et seulement si v dirige la tangente en x à un arc paramétré tracé sur X passant par x.

8.2 Plan tangent à une surface

Notation. On suppose que E est euclidien de dimension 3.

Définition. On appelle nappe paramétrée différentiable toute application différentiable $\begin{array}{rccl} M: & U & \longrightarrow & E \\ & (u,v) & \longmapsto & M(u,v) \end{array}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. $M(U)$ est le support de la nappe M.

Définition. Soit $M : U \longrightarrow E$ une nappe différentiable et soit $(u_0, v_0) \in U$. Toute combinaison linéaire des vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$ est un vecteur tangent à $M(U)$ en $M(u_0, v_0)$. Lorsque $\big(\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\big)$ est libre, le plan affine $M(u_0, v_0) + \mathrm{Vect}\big(\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\big)$ est appelé le plan tangent à M en $M(u_0, v_0)$, et la droite affine $M(u_0, v_0) + \mathbb{R}\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est appelée la normale à M en $M(u_0, v_0)$.

Propriété. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable.
Alors la surface S d'équation $z = f(x, y)$ est appelée le graphe de l'application f. S est aussi le support de la nappe paramétrée différentiable $M : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $M(x, y) = \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ f(x,y) \end{array} \right.$.

Fixons $(x_0, y_0) \in U$ et notons $z_0 = f(x_0, y_0)$ et $M_0 = \underset{\mathcal{R}}{\left| \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right.}$.

Alors le plan tangent en M_0 à S a pour équation $z - z_0 = (x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Il faut savoir le démontrer.

8.3 Surfaces de niveau

Notation. On suppose que E est euclidien. Soit U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On appelle surfaces (ou lignes) de niveau de f les ensembles $\{x \in U / f(x) = k\}$, où k est fixé.

Propriété. Soit x un point de la surface de niveau $X = \{x \in U / f(x) = k\}$. Alors tout vecteur tangent en x à X est orthogonal au gradient de f en x.
On dit que le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau de f.
Il faut savoir le démontrer.

Familles sommables

9 Familles sommables de réels positifs

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un ensemble I.
On fixe également une famille $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ de réels positifs indexée par I.

Définition. On pose $\boxed{\displaystyle\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \in \mathcal{P}(I) \\ J \text{ finie}}} \sum_{i \in J} u_i \ \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}$.

Définition. La famille u est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i < +\infty$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute partie finie J de I, $\displaystyle\sum_{i \in J} u_i \leq M$.

Propriété. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $\{i \in I / u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque. Pour toute la suite, I est supposé au plus dénombrable.

Propriété. Soient $v = (v_i)_{i \in I}$ et $w = (w_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que, pour tout $i \in I$, $v_i \leq w_i$. Si w est sommable, alors v est également sommable et $\displaystyle\sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in I} w_i$

Propriété. Lorsque $v = (v_i)_{i \in I}$ et $w = (w_i)_{i \in I}$ sont deux familles de réels positifs telles que, pour tout $i \in I$ $v_i \leq w_i$, on peut toujours écrire que, dans $[0, +\infty]$, $\displaystyle\sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in I} w_i$.

Propriété. Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée à I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
— $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
— La suite $\left(\displaystyle\sum_{i \in J_n} u_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

— La suite $\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$.

De plus, dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in J_n} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{N}$, $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum u_n$ est convergente et dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème. Supposons que I est dénombrable et soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans I.

$(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum u_{\varphi(n)}$ est convergente et dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Propriété de linéarité : Si $(v_i)_{i\in I}$ et $(w_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $(\alpha v_i + w_i)_{i\in I}$ est sommable. Dans ce cas, $\sum_{i\in I}(\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} w_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Convention : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
S'il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} = +\infty$, on convient que $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Convention : lorsqu'on travaille dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on utilise la convention $0 \times (+\infty) = 0$.
On convient aussi, mais c'est plus universel, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \times (+\infty) = +\infty$.

Propriété. Soit $(v_i)_{i\in I}$ et $(w_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Alors, dans tous les cas, $\sum_{i\in I}(\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} w_i$.