Feuille d'exercices 27.
Probabilités, sommes de Riemann

Événements

Exercice 27.1 : (niveau 1)
Si P est une probabilité sur Ω et si $G \subset \Omega$ vérifie $P(G) = 1$, montrer que pour tout F, $P(F \cap G) = P(F)$.

Exercice 27.2 : (niveau 1)
Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un univers Ω. Soit E, F et G trois événements de $\mathcal{F}$. Pour chacune des descriptions suivantes, préciser l'événement correspondant et montrer qu'il est bien dans $\mathcal{F}$.

1°) E et F se réalisent mais G ne se réalise pas.

2°) Au moins l'un des événements se réalise.

3°) Au plus deux des trois événements se réalisent.

4°) Exactement un de ces événements est réalisé.

Exercice 27.3 : (niveau 1)
Soit $N \in \mathbb{N}$. On dispose d'une urne avec N boules numérotées de 1 à N. Le jeu consiste à tirer une boule. On a un succès si on tire la boule portant le numéro 1. On joue de manière répétée à ce jeu. Les jeux sont indépendants. Quel est le nombre k de jeux nécessaires pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 27.4 : (niveau 2)

1°) Énoncer et démontrer la formule de Bayes.

2°) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
(a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

(c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 27.5 : (niveau 2)
Ruine du joueur :
On fixe $N \in \mathbb{N}$ et $n \in [0, N] \cap \mathbb{N}$.
Deux joueurs s'affrontent dans une succession de “pile ou face”, la probabilité de “pile” étant $p \in]0, 1[$. Le joueur 1 possède initialement n euros et le joueur 2 possède initialement $N - n$ euros. Lorsque le résultat d'un tirage est pile, le joueur 2 donne un euro au joueur 1 et symétriquement dans l'autre cas, c'est le joueur 1 qui donne un euro au joueur 2. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.
On note p_n la probabilité que le joueur 1 finisse ruiné s'il commence avec n euros. Symétriquement, on note q_n la probabilité que le joueur 2 finisse ruiné s'il commence avec $N - n$ euros.

1°) Montrer que si $0 < n < N$, alors $p_n = pp_{n+1} + (1 - p)p_{n-1}$.

2°) En déduire l'expression de p_n.

3°) Calculer de même q_n, puis $p_n + q_n$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 27.6 : (niveau 2)
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, notons T_θ l'application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{U},\ \ T_\theta(z) = ze^{i\theta}$.
Si l'on identifie $\mathbb{U}$ et $[0, 2\pi[$, T_θ correspond à la translation selon θ.
On suppose qu'il existe sur la tribu pleine de $\mathbb{U}$, c'est-à-dire sur $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, une probabilité P qui est invariante par translation, c'est-à-dire telle que, pour tout $A \subset \mathbb{U}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(T_\theta(A)) = P(A)$.

1°) Lorsque $z, z' \in \mathbb{U}$, on convient que $z\ R\ z'$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $z = z'e^{2i\pi\alpha}$. Montrer que R est une relation d'équivalence.

2°) À l'aide de l'axiome du choix, on choisit, pour chaque classe d'équivalence c de R, un unique élement α_c dans cette classe d'équivalence. On pose $V = \{\alpha_c \ / \ c \in \mathbb{U}/R\}$.
Utiliser V pour obtenir une contradiction, ce qui prouve qu'il n'existe pas sur la tribu pleine de $\mathbb{U}$ de probabilité invariante par translation.

Exercice 27.7 : (niveau 3)
Loi de succession de Laplace :
N urnes sont numérotées de 1 à N. On suppose que l'urne de numéro k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires.
On choisit une urne au hasard, et sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1°) Quelle est la probabilité que le tirage suivant (toujours dans la même urne) donne encore une boule blanche, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?

2°) Quelle est la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini ?

Variables aléatoires

Exercice 27.8 : (niveau 1)
On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant b_1, b_2 boules blanches et n_1, n_2 boules noires. On choisit au hasard une urne et on tire ensuite une boule dans cette urne.

1°) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

2°) Quelle la probabilité d'avoir effectué le tirage dans l'urne U_i sachant qu'une boule noire a été tirée ?

Exercice 27.9 : (niveau 1)
X_1 suit une loi binomiale de paramètres (n_1, p),
X_2 suit une loi binomiale de paramètres (n_2, p).
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes.
Calculer la loi de X_1 sachant que $X_1 + X_2 = n$ (avec n un entier compris entre 0 et $n_1 + n_2$).

Exercice 27.10 : (niveau 2)
On considère X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ et suivant toutes une loi uniforme. On note Y_1, Y_2, Y_3 les valeurs de X_1, X_2, X_3 réordonnées dans l'ordre croissant. En particulier, $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ et $Y_3 = \max(X_1, X_2, X_3)$.

1°) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, trouver $P(Y_3 \leq k)$. En déduire la loi de Y_3.

2°) Déterminer la loi de Y_1.

3°) On note Z_k la variable aléatoire égale au nombre d'indice $i \in \{1, 2, 3\}$ tels que $X_i \leq k$.
a) Quelle est la loi de Z_k ?
b) Comparer $[Z_k \geq 2]$ et $[Y_2 \leq k]$. En déduire $P(Y_2 \leq k)$.

Exercice 27.11 : (niveau 2)
On considère deux urnes U et V contenant chacune 2 boules. Au départ, l'urne U contient 2 boules blanches et l'urne V contient 2 boules noires.
On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (il y a donc échange de 2 boules à chaque tirage).
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U avant le $(n+1)$-ème tirage et on a donc $X_0 = 2$.
Pour tout entier naturel n, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

1°) On note M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i+1)$-ème ligne et de la $(j+1)$-ème colonne, pour tout couple $(i, j) \in \{0, 1, 2\}^2$, est égal à $P(X_{n+1} = i | X_n = j)$, lorsque $P(X_n = j) > 0$.

a) Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = MC_n$ puis que $C_n = M^n C_0$.

2°) Calculer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27.12 : (niveau 3)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on convient que $S_0 = 0$. On note également $Z_n = n - S_n$.

1°) S_n et Z_n sont-elles indépendantes ?
Soit N une variable aléatoire indépendante des X_n telle que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On pose $S = X_1 + \cdots + X_N$ et $Z = N - S$.

2°) Montrer que S et Z sont des variables aléatoires.

3°) Montrer que S et Z sont indépendantes et préciser leurs lois.

Espérance

Exercice 27.13 : (niveau 1)
On dispose d'une urne contenant n boules. On en tire n avec remise, et on marque chaque boule tirée. Donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini du nombre de boules marquées.

Exercice 27.14 : (niveau 2)
Soit P_1,..., P_n une communauté de n personnes, avec $n \geq 2$. De façon indépendante, chacune envoie une lettre à une autre personne de la communauté en choisissant au hasard (de façon uniforme) le destinataire.

1°) On considère l'une de ces personnes : quelle est la probabilité $p_{j,n}$ qu'elle reçoive j lettres ? Donner un équivalent de $p_{j,n}$ lorsque $n \to \infty$ (j fixé). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

2°) Déterminer la probabilité que l'une au moins des n personnes reçoive exactement j lettres, lorsque $j > n/2$.

Exercice 27.15 : (niveau 2)
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1°) Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

2°) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq N}(X_i)$.
c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$, min désignant "le plus petit élément de".
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.
b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 27.16 : (niveau 2)
Dix chasseurs guettent le passage d'un vol de canards. Lorsque les canards passent en groupe, les chasseurs font tous feu en même temps mais chacun choisit sa cible au hasard indépendamment des autres. On admet que chaque chasseur touche son canard avec la même probabilité p.

1°) Combien de canards, en moyenne, survivront au tir lorsque le vol se compose de 20 canards ?

2°) Quel sera le nombre de canards touchés si le vol se compose d'un nombre de canards suivant une loi de Poisson de paramètre 15 ?

Exercice 27.17 : (niveau 3)
Graphe aléatoire d'Erdös-Rényi.
Si S est un ensemble et si $A \subset \{\{x,y\}/x, y \in S \text{ avec } x \neq y\}$, $G = (S; A)$ est appelé le graphe dont S est l'ensemble des sommets et dont A est l'ensemble des arêtes.
Fixons deux entiers $m \geq 0$ et $n \geq 1$. On impose $S = \{1, \dots, n\}$ et $\mathrm{Card}(A) = m$.
On note Ω l'ensemble des graphes de sommets S possédant m arêtes.
On choisit sur Ω la probabilité uniforme notée P.

1°) Si $G \in \Omega$, que vaut $P(G)$?

2°) Soit $i, j \in S$ avec $i \neq j$. On note $i \sim j$ l'événement "les deux sommets i et j sont reliés par une arête". Calculer $P(i \sim j)$.

3°) On appelle triangle d'un graphe, un ensemble de trois sommets distincts $\{x, y, z\}$ tels que $x \sim y$, $y \sim z$ et $z \sim x$. Quelle est l'espérance du nombre de triangles dans un graphe de Ω ?

Variance

Exercice 27.18 : (niveau 1)
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire discrète réelle.
On suppose que X admet un moment d'ordre k, c'est-à-dire que $E(|X|^k) < +\infty$.
Montrer que, pour tout $h \in \{1, \ldots, k\}$, X possède un moment d'ordre h.

Exercice 27.19 : (niveau 2)
On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$. On pose également $Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$.

1°) Quelle est la loi de Y_i ?

2°) Calculer l'espérance de Y.

3°) Calculer la variance de Y.

Exercice 27.20 : (niveau 2)
Considérons une matrice carrée aléatoire M de taille $n \times n$ dont les coefficients $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes, telles que $P(X_{i,j} = \pm 1) = 1/2$. Calculer la variance du déterminant de M.

Exercice 27.21 : (niveau 3)
Inégalité de Chernoff :
On effectue une infinité de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Afin de travailler avec des variables centrées, on encode le résultat du kème jet par une variable aléatoire X_k telle que $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1°) Montrer que la loi faible des grands nombres fournit la majoration suivante : $P(|S_{10\ 000}| \geq 0,1) \leq 0,01$.

2°) Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
on note $H(t) = \ln E(e^{tX})$, avec la convention $H(t) = +\infty$ si $E(e^{tX}) = +\infty$.
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X \geq a) \leq e^{\inf_{t \geq 0}(H(t) - ta)}$.

3°) Lorsque $X = S_n$, montrer que $H(t) = n \ln(ch(\frac{t}{n}))$.

4°) En déduire que $P(|S_{10\ 000}| \geq 0,1) \leq 3,6 \times 10^{-22}$.

Sommes de Riemann

Exercice 27.22 : (niveau 1)
*I*négalité de Jensen. Soit f une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admettra que f est alors continue.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et g une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $f\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)dt\right) \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(g(t))dt$.

Exercice 27.23 : (niveau 1)
Limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(1+(\frac{k}{n})^2\Big)}$.

Exercice 27.24 : (niveau 2)
Soit f une application continue de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $\alpha_k \in [\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}]$ tel que $\displaystyle\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|sin(nx)|dx = f(\alpha_k)\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |sin(nx)|dx$.

2°) Montrer que $\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$.

Exercices supplémentaires

Exercice 27.25 : (niveau 1)
Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1°) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

2°) Calculer λ.

3°) Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.

4°) X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 27.26 : (niveau 1)
Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :
- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement "Gagner la partie n", et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1°) Écrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.

2°) En utilisant $u_n + v_n$, calculer u_n et v_n en fonction de n.
Proposer une autre méthode utilisant des matrices : le calcul n'est pas demandé.

Exercice 27.27 : (niveau 1)
Limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 27.28 : (niveau 1)
Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus grand des deux numéros obtenus. Donner la loi de Y.

Exercice 27.29 : (niveau 1)
Montrer qu'une variable aléatoire réelle dont l'ensemble des valeurs est de cardinal 3 a sa loi déterminée par son espérance et par sa variance.

Exercice 27.30 : (niveau 1)
Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20".
Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale)
Quelle est son espérance, son écart-type ?
Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 27.31 : (niveau 2)
Un tribunal de 3 juges déclare un individu coupable lorsque 2 au moins des 3 juges estiment que cette décision est fondée. On admettra que si l'accusé est effectivement coupable, chaque juge se prononcera dans ce sens avec probabilité 0,7, ceci indépendamment des 2 autres. Cette probabilité tombe à 0,2 dans le cas où l'accusé est innocent. 70 % des accusés sont coupables. Calculer la probabilité que le juge 3 vote coupable dans chacune des situations suivantes :

1°) les juges 1 et 2 l'ont fait ;

2°) le juge 1 a voté coupable et le juge 2 a voté non coupable ;

3°) les juges 1 et 2 ont voté tous deux non coupables.

Exercice 27.32 : (niveau 2)
La famille Simpson comporte 2 enfants ; les événements A : "il y a deux enfants de sexes différents chez les Simpson" et B : "la famille Simpson a au plus une fille" sont-ils indépendants ? Même question si la famille Simpson comporte 3 enfants. Généraliser.

Exercice 27.33 : (niveau 2)
Un avion est porté disparu. On pense que l'accident a pu arriver aussi bien dans n'importe laquelle de 3 régions données. Notons par $1 - \alpha_i$ la probabilité que l'on découvre l'avion dans la région i s'il y est effectivement. Les valeurs α_i représentent donc la probabilité de manquer l'avion lors des recherches. On peut l'attribuer à diverses causes d'ordre géographique ou à la végétation propre à la région. Quelle est la probabilité que l'avion se trouve dans la $i$ème région ($i = 1, 2, 3$) si les recherches dans la région 1 n'ont rien donné ?

Exercice 27.34 : (niveau 2)
Le problème du ballot.
Lors d'une élection opposant deux candidats A et B, le premier reçoit n voix et le second $m \leq n$ voix. En supposant équiprobables les différents ordres d'apparition des bulletins lors du dépouillement (et en ignorant les bulletins blancs ou non valides), on note $P(n, m)$ la probabilité que le candidat A soit toujours strictement en tête lors du dépouillement.

1°) Montrer que

$$\begin{aligned} P(n,m) = \quad & P(A \text{ toujours en tête} \mid \text{le dernier vote est en faveur de A})\frac{n}{n+m} \\ & + P(A \text{ toujours en tête} \mid \text{le dernier vote est en faveur de B})\frac{m}{n+m}. \end{aligned}$$

2°) En déduire que $P(n, m) = \dfrac{n-m}{n+m}$.

Exercice 27.35 : (niveau 2)
Soient f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})g(\frac{k+1}{n})$.

Exercice 27.36 : (niveau 2)
Loi hypergéométrique :
Une urne contient N balles, dont b sont bleues et $r = N - b$ sont rouges. Un échantillon de n balles est tiré de l'urne, sans remise.

1°) Quelle est la loi du nombre B de balles bleues dans l'échantillon ?

2°) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$.
On suppose que b dépend de N avec $\dfrac{b_N}{N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} p$, où p est fixé dans $]0, 1[$.
Montrer que $P(B_N = k) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

Exercice 27.37 : (niveau 2)
Soit x un réel compris entre 0 et 1. Soit $n, m \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1$.
Indication : On pourra utiliser les cases d'un damier $n \times m$, coloriées de manière indépendante en blanc avec une probabilité x et en noir avec une proba de $1 - x$.

Exercice 27.38 : (niveau 2)
Une modélisation du "pile ou face" infini :
On admet que sur $\Omega = [0, 1[$, il existe une tribu $\mathcal{F}$ contenant les intervalles et une probabilité $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ tel que pour tout intervalle $I \subset [0, 1[$, $P(I)$ est égal à la longueur de I.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire de $[0, 1[$ dans $\{0, 1\}$ définie par : pour tout $\omega \in [0, 1[$, $X_n(\omega)$ est égal à la n-ième décimale de ω en base 2.

1°) Quelle est la loi de X_n ?

2°) Montrer que les X_n sont mutuellement indépendantes.

Exercice 27.39 : (niveau 2)
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1°) Déterminer la loi du couple (U, V).

2°) Expliciter les lois marginales de U et de V.

3°) U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 27.40 : (niveau 2)
On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à l'obtention d'un pile. On note X le nombre de lancers effectués.

1°) Quelle est la loi de X ?

2°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $X \in n\mathbb{Z}$.

a) Calculer $P(A_n)$.
b) Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.

3°) On note B l'événement "X est premier".
Montrer que $\frac{13}{32} < P(B) < \frac{209}{504}$. On rappelle que 1 n'est pas premier.

Exercice 27.41 : (niveau 2)
Urne de Polya :
Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq 1 \leq n}$ définies par : $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au ième tirage et $X_i = 0$ sinon.

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p par : $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$

1°) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.

2°) Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

3°) Soit $p \leq n-1$. Déterminer $P(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
Montrer que : $P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$, puis montrer que pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $P(X_p = 1) = P(X_p = 0) = 1/2$.

Exercice 27.42 : (niveau 3)
Andi va skier et emprunte une des N perches d'un remonte-pente. Entre cet instant et la prochaine remontée, le nombre de skieurs qui se présentent suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité pour Andi de reprendre la même perche ?

Exercice 27.43 : (niveau 3)
Soit α un réel différent de 1 et de -1. Calculez $\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2)dt$, à l'aide de sommes de Riemann.

Exercice 27.44 : (niveau 3)
Le nombre de clients se rendant à un grand magasin donné dans l'espace d'une journée est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 50. La somme dépensée par chacun des clients quotidiens du magasin est une variable aléatoire d'espérance 8 euros. On admet que les dépenses d'un client ne dépendent ni de celles des autres clients, ni du nombre total de clients pour la journée. Quelle est l'espérance du chiffre d'affaires quotidien du magasin ?

Exercice 27.45 : (niveau 3)
Toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $\alpha > 0$, on dit que la variable aléatoire X est α-sous-gaussienne si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(e^{tX}) \leq e^{(\alpha^2 t^2)/2}$.

1°) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $ch(t) \leq e^{t^2/2}$: on pourra utiliser le développement en série entière de $ch(t)$.

2°) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$, démontrer l'inégalité de convexité :
$e^{tx} \leq \frac{1+x}{2}e^t + \frac{1-x}{2}e^{-t}$.

3°) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

4°) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes et soit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

5°) Soit X un variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$.
Montrer que pour tout $t > 0$, $P(X \geq \lambda) \leq e^{\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda}$.
En déduire que $P(|X| \geq \lambda) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}}$.

Exercice 27.46 : (niveau 3)
Loi forte des grands nombres.

1°) Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements tels que la série $\sum P(G_n)$ est convergente.
Montrer que $P(\bigcup_{k\geq n} G_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis en déduire que $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} G_k) = 0$ (lemme de Borel-Cantelli).

2°) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes et soit X une variable aléatoire discrète, toutes définies sur l'univers Ω et à valeurs réelles.
On note $G = \{\omega \in \Omega / \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$.

a) Montrer que $G = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{|X_n - X| < \frac{1}{k}\}$.

b) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_n P(|X_n - X| \geq \frac{1}{k})$ est convergente. Montrer que $P(G) = 1$.

3°) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles mutuellement indépendantes et de même loi. On suppose que X_1^4 est d'espérance finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Montrer que $P(\{\omega \in \Omega / \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = E(X_1)\}) = 1$.