

Résumé de cours :
Semaine 34, du 15 juin au 20 juin.

Première partie

Familles sommables (suite et fin)

1 Familles sommables de complexes

Notation. I désigne un ensemble au plus dénombrable et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I . On fixe une famille $u = (u_i)_{i \in I}$ de complexes.

Définition. $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable dans \mathbb{R}_+ .

Ainsi, $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Propriété. Supposons que tous les u_i sont réels. On pose $u_i^+ = \max(u_i, 0)$ et $u_i^- = \max(-u_i, 0)$. : $u_i = u_i^+ - u_i^-$ et $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$. $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on pose $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$.

Propriété. Supposons que les u_i sont complexes. Alors $\operatorname{Re}(u) = (\operatorname{Re}(u_k))_{k \in I}$ et $\operatorname{Im}(u) = (\operatorname{Im}(u_k))_{k \in I}$ sont à valeurs dans \mathbb{R} . u est sommable si et seulement si $\operatorname{Re}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont sommables et dans ce cas, on convient que $\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(u_k)$,

Propriété. $\forall (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$, $\sum_{i \in I} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in J_n} u_j$.

Il faut savoir le démontrer.

Inégalité triangulaire : si u est sommable, alors $|\sum_{i \in I} u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{N}$, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Propriété. Lorsque $I = \mathbb{Z}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_{-n}$ sont

absolument convergentes et dans ce cas $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2 Propriétés des familles sommables

Notation. I désigne un ensemble au plus dénombrable et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I .

2.1 Linéarité

Propriété de linéarité : soit $a = (a_i)_{i \in I}$ et $b = (b_i)_{i \in I}$ deux familles sommables de complexes et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors la famille $\alpha a + b = (\alpha a_i + b_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} (\alpha a_i + b_i) = \alpha \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ et $(v_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$. Si pour tout $i \in I$, $|v_i| \leq u_i$ et si (u_i) est sommable, alors (v_i) est sommable et $|\sum_{i \in I} v_i| \leq \sum_{i \in I} u_i$.

Notation. $l^\infty(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des familles $(u_i)_{i \in I}$ bornées de réels, et pour $p \in [1, +\infty[$, $l^p(I, \mathbb{K}) = \left\{ (u_i)_{i \in I} / \sum_{i \in I} |u_i|^p < +\infty \right\}$.

Propriété. $l^1(I, \mathbb{K})$, $l^2(I, \mathbb{K})$ et $l^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^I . De plus si (a_i) et (b_i) sont dans $l^2(I, \mathbb{K})$, alors $(a_i b_i)$ est un élément de $l^1(I, \mathbb{K})$.

Propriété. Pour tout $(u_i), (v_i) \in l^2(I, \mathbb{R})$, on pose $((u_i)|(v_i)) = \sum_{i \in I} u_i v_i$.

$l^2(I, \mathbb{R})$ muni de $(\cdot|\cdot)$ est un espace préhilbertien.

Propriété.

- En posant $\|(u_i)_{i \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} |u_i|$, $(l^\infty(I), \mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé ;
- En posant $\|(u_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{i \in I} |u_i|$, $(l^1(I), \mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé ;
- En posant $\|(u_i)_{i \in I}\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} |u_i|^2}$, $(l^2(I), \mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé.

2.2 Commutativité

Propriété. Commutativité de la somme d'une famille sommable.

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de I dans I .

Alors $(u_{\varphi(i)})_{i \in I}$ est aussi sommable et $\sum_{i \in I} u_{\varphi(i)} = \sum_{i \in I} u_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. (Hors programme) Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de K dans I . Alors $(u_{\varphi(k)})_{k \in K}$ est aussi sommable et $\sum_{k \in K} u_{\varphi(k)} = \sum_{i \in I} u_i$.

Remarque. Lorsque $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$, pour toute bijection d'un ensemble K dans I , $\sum_{k \in K} u_{\varphi(k)} = \sum_{i \in I} u_i$.

Théorème. Sommation par paquets pour des familles de réels positifs.

Soit $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une partition de I (on accepte que certains I_q soient vides).

On suppose que $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$. Alors u est sommable si et seulement si

- ◊ pour tout $q \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_q}$ est sommable et
- ◊ la suite $\left(\sum_{i \in I_q} u_i \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Dans ce cas, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Remarque. En cas de non sommabilité, on a encore : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i = +\infty$.

Ainsi, on peut énoncer le théorème sous une forme plus concise :

si $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est une partition de I et si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$, alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Corollaire. Intersion de sommations pour des suites doubles de réels positifs (Fubini).

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

◇ La famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

◇ Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(u_{p,q})_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable et la suite $\left(\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable.

◇ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(u_{p,q})_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable et la suite $\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Dans ce cas, on dit que $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable et on dispose des égalités suivantes.

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Remarque. Si l'on accepte de travailler dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on peut énoncer ce théorème sous la forme

suivante : Pour tout $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$, $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$.

Théorème. Sommation par paquets pour des familles de complexes.

Soit $(I_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une partition de I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes. Alors, pour tout

$q \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i \in I_q}$ est sommable, et $\left(\sum_{i \in I_q} u_i \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable. De plus, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_q} u_i$.

Corollaire. Intersion de sommations pour des suites doubles de complexes.

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ une suite double sommable de complexes. Pour tout $q_0 \in \mathbb{N}$, (u_{p,q_0}) est sommable, pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$, $(u_{p_0,q})$ est sommable, et les suites $\left(\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ sont

sommables. De plus $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$.

Exemple. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes de complexes. Alors la famille

$(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable et $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q \right)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Produit de Cauchy de deux séries. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de complexes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}$.

La série $\sum w_n$ est appelée le produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Propriété. Le produit de Cauchy de deux séries **absolument** convergentes est absolument convergent.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

Il faut savoir le démontrer.

Les probabilités

3 Espaces probabilisés

Définition. On appelle tribu, ou σ -algèbre sur un ensemble Ω tout ensemble \mathcal{F} de parties de Ω vérifiant : $\Omega \in \mathcal{F}$, \mathcal{F} est stable par passage au complémentaire (si $F \in \mathcal{F}$ alors $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}$) et \mathcal{F} est stable par réunion dénombrable (si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$).

Vocabulaire spécifique aux probabilités : Avec les notations précédentes,

- ◇ Ω s'appelle l'univers.
- ◇ Les éléments de \mathcal{F} s'appellent les **événements**.
- ◇ Si $\{\omega\} \in \mathcal{F}$, on dit que c'est un **événement élémentaire**.
- ◇ \emptyset est l'événement impossible.
- ◇ Si A est un événement, $\Omega \setminus A$ est l'événement contraire de A .
- ◇ Si A et B sont deux événements, $A \cap B$ est l'événement "A et B", $A \cup B$ est l'événement "A ou B". Lorsque $A \cap B = \emptyset$, les deux événements A et B sont dits incompatibles.

Définition. Soit \mathcal{F} une tribu sur un univers Ω . On appelle système complet d'événements toute famille $(A_i)_{i \in I}$ (où I est fini ou dénombrable) d'événements 2 à 2 disjoints dont la réunion vaut Ω .

Définition. Si \mathcal{F} est une tribu sur un univers Ω , on dit que (Ω, \mathcal{F}) est un espace probabilisable.

Définition. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable. On dit que P est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) si et seulement si P est une application de \mathcal{F} dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et pour toute suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{F} deux à deux disjoints, $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(F_n)$.

Dans ce cas, le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) est appelé un espace probabilisé.

Propriété. Avec les notations précédentes, pour $F, G, H, F_n \in \mathcal{F}$ on a :

- ◇ $P(\emptyset) = 0$,
- ◇ Si F_0, \dots, F_p sont $p + 1$ événements deux à deux disjoints, où $p \geq 1$,

$$\text{alors } P\left(\bigcup_{n=0}^p F_n\right) = \sum_{n=0}^p P(F_n).$$

- ◇ $P(\bar{F}) = 1 - P(F)$ (où \bar{F} désigne $\Omega \setminus F$),
- ◇ si $G \subset H$, $P(H \setminus G) = P(H) - P(G)$.
- ◇ si $G \subset H$, $P(G) \leq P(H)$ (on dit que P est croissante),
- ◇ $P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H)$,

- ◇ **Inégalité de Boole :** $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(F_n)$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. On notera souvent $P(G, H) \triangleq P(G \cap H)$.

Propriété : Probabilité sur un univers dénombrable. Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on prendra toujours $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dans ce cas, pour se donner une probabilité P sur (Ω, \mathcal{F}) , il faut et il suffit de donner une famille sommable $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. On définit alors

$$P \text{ par : pour tout } F \in \mathcal{F}, P(F) = \sum_{\omega \in F} p_\omega.$$

Définition. Supposons que Ω est de cardinal fini. On dit que P est la probabilité uniforme lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables. Dans ce cas, avec les notations de la propriété précédente, pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$, et pour tout $F \in \mathcal{F}$, $P(F) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Propriété de continuité : dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) ,

si (F_n) est une suite croissante d'événements, $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n)$.

Si (F_n) est une suite décroissante d'événements, $P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. On dit que l'événement F est négligeable si et seulement si $P(F) = 0$.

On dit que l'événement F est presque sûr si et seulement si $P(F) = 1$.

Si \mathcal{Q} est une propriété dépendant de $\omega \in \Omega$, lorsque $\{\omega \in \Omega / \mathcal{Q}(\omega)\}$ est un événement presque sûr, on dit que " $\mathcal{Q}(\omega)$ presque sûrement".

Propriété. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

4 Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition. Si $P(G) > 0$, $P(H|G) \triangleq \frac{P(H \cap G)}{P(G)}$: c'est la probabilité conditionnelle de H sachant que G est réalisé. L'application $H \mapsto P(H|G)$ est une probabilité sur Ω , notée P_G .

Ainsi, $P(H|G) = P_G(H) = \frac{P(H \cap G)}{P(G)}$.

Formule des probabilités composées :

si G_1, \dots, G_k sont k événements tels que $P(G_1 \cap \dots \cap G_{k-1}) > 0$, alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k G_i\right) = P(G_1) \times P(G_2|G_1) \times P(G_3|G_1 \cap G_2) \times \dots \times P(G_k|G_1 \cap \dots \cap G_{k-1}).$$

Formule des probabilités totales : si $(G_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, où I est fini ou dénombrable, et si pour tout $i \in I$, $P(G_i) > 0$, alors $P(G) = \sum_{i \in I} P(G|G_i)P(G_i)$.

Formule de Bayes : Si $P(G) \in]0, 1[$ et $P(H) > 0$, alors $P(G|H) = \frac{P(H|G)P(G)}{P(H|G)P(G) + P(H|\bar{G})P(\bar{G})}$

Si $(G_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements avec pour tout $i \in I$, $P(G_i) > 0$, et si $P(H) > 0$,

alors
$$P(G_i|H) = \frac{P(H|G_i)P(G_i)}{\sum_{j \in I} P(H|G_j)P(G_j)}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Définition. H et G sont indépendants si et seulement si $P(G \cap H) = P(G)P(H)$.

Propriété. Si H et G sont indépendants, alors H et \bar{G} sont aussi indépendants.

Remarque. Un événement A est indépendant de lui-même si et seulement si $P(A) \in \{0, 1\}$.

Définition. I étant un ensemble quelconque, les événements de la famille $(G_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants si et seulement si pour toute partie finie J de I , $P\left(\bigcap_{i \in J} G_i\right) = \prod_{i \in J} P(G_i)$.

Remarque. “mutuellement indépendants” \implies “2 à 2 indépendants”, mais la réciproque est fausse.

Propriété. Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Si l'on remplace certains G_i par leur conjugué $\overline{G_i}$, alors c'est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

5 Variables aléatoires discrètes

Définition. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité. Une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E muni d'une tribu \mathcal{E} est une fonction $X : \Omega \longrightarrow E$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

On note souvent “ $X \in A$ ” au lieu de $X^{-1}(A)$.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.

Lorsque $E = \mathbb{N}$, on dit que X est une variable aléatoire entière.

Propriété. Avec les notations précédentes, si l'on pose, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $P_X(A) = P(X \in A)$, alors P_X est une probabilité sur (E, \mathcal{E}) que l'on appelle la loi de X .

Définition. Si B est un événement de Ω , la loi de X conditionnée par B désigne l'application $A \longmapsto P(X \in A|B) = \frac{P((X \in A) \cap B)}{P(B)}$, de \mathcal{E} dans $[0, 1]$. C'est encore une probabilité sur (E, \mathcal{E}) .

Définition. On dit qu'une variable aléatoire X est discrète si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et si $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$.

Remarque. Le programme de MP ne prévoit que l'étude des variables aléatoires discrètes, ce que nous supposons donc dorénavant.

Propriété. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et X une application de Ω dans un ensemble quelconque E . X est une variable aléatoire discrète si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et si, pour tout $d \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{d\}) \in \mathcal{F}$.

Dans ce cas, la loi de X est entièrement déterminée par la famille $(P(X = d))_{d \in X(\Omega)}$.

Remarque. Toute variable aléatoire entière est discrète.

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète de Ω dans E et f une application de E dans un ensemble F . Alors $Y = f(X) \stackrel{\Delta}{=} f \circ X$ est une nouvelle variable aléatoire discrète dont la loi est donnée

par : $\forall y \in F, P_Y(y) = P(X \in f^{-1}(\{y\})) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} P_X(x)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit X une variable aléatoire de Ω dans un ensemble E de cardinal fini. On dit que X suit une loi uniforme (souvent notée \mathcal{U}) si et seulement si P_X est la probabilité uniforme, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $k \in E$, $P(X = k) = \frac{1}{\text{Card}(E)}$.

Définition. On fixe une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} .

Les lois classiques au programme sont les suivantes :

- Loi de dirac, lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(X = n_0) = 1$ et $P(X = n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$. On dit alors que X est une variable aléatoire déterministe, ou bien constante.

- **Loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(p)$:

$$\boxed{P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p}.$$

C'est le cas lorsque X représente le succès ($X = 1$) ou l'échec ($X = 0$) d'une épreuve.

- **Loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(n, p)$:

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$ (et $P(X = m) = 0$ pour

$m \notin \{0, \dots, n\}$). C'est le cas lorsque X désigne le nombre de succès parmi une suite de n épreuves indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p .

- **Loi géométrique** de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{G}(p)$:
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p}$ (et $P(X = 0) = 0$).
 C'est le cas lorsque X représente l'instant du premier succès lors d'une suite d'épreuves indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p .
- **Loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}$.

Notation. On utilisera la notation $X \sim \mathcal{L}$ pour indiquer que la variable aléatoire X suit la loi \mathcal{L} et la notation $X \sim Y$ pour indiquer que les deux variables aléatoires suivent la même loi.

Propriété. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$ si et seulement si il existe un événement A tel que $X = 1_A$. Dans ce cas, on a $X = 1_A \sim \mathcal{B}(p)$ où $p = P(A)$.

Définition. Si X est une variable aléatoire réelle, l'application $x \mapsto P(X \leq x)$ est la fonction de répartition de X .

Définition. Hors programme : Convergence en loi :

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une autre variable aléatoire réelle. On dit que X_k converge en loi vers X lorsque k tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x) = 0$, $P(X_k \leq x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P(X \leq x)$. on note alors $X_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$.

Propriété. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires entières et X une autre variable aléatoire entière. $X_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \iff [\forall n \in \mathbb{N}, P(X_k = n) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P(X = n)]$.

Propriété. Pour les variables aléatoires entières, les lois géométriques sont les seules lois sans mémoire. Plus précisément, si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* , elle est sans mémoire, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ $P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$, si et seulement si il existe $p \in]0, 1[$ tel que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Il faut savoir le démontrer.

6 Variables aléatoires indépendantes

6.1 Lois conjointes et lois marginales

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si X_1, \dots, X_n est une suite de n variables aléatoires discrète de Ω dans des ensemble E_i , alors, en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, on définit une variable aléatoire discrète $X \triangleq (X_1, \dots, X_n)$ de Ω dans $E_1 \times \dots \times E_n$.

On dit que la loi de X est la loi conjointe des variables aléatoires X_1, \dots, X_n .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi de X_i est appelée la i ème loi marginale de X .

Exemple. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires entières. On note $(p_{1,k}) = (P(X_1 = k))$ la première loi marginale de X et $(p_{2,k}) = (P(X_2 = k))$ la seconde loi marginale.

On note également $c_{h,k} = P(X = (h, k))$ la loi conjointe. Alors $p_{1,k} = \sum_{h \in \mathbb{N}} c_{k,h}$ et $p_{2,k} = \sum_{h \in \mathbb{N}} c_{h,k}$.

Définition. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $h \in X_2(\Omega)$ tel que $P(X_2 = h) > 0$, la loi conditionnelle de X_1 sachant que $X_2 = h$ désigne la probabilité $A \mapsto P(X_1 \in A | X_2 = h)$ (définie sur $\mathcal{P}(X_1(\Omega))$). Elle est caractérisée par la suite des $(P(X_1 = k | X_2 = h))_{k \in \mathbb{N}}$. On définit de même la loi conditionnelle de X_2 sachant que $X_1 = k$.

Exemple. Avec les notations de l'exemple précédent, $P(X_1 = k | X_2 = h) = \frac{c_{k,h}}{p_{2,h}}$.

6.2 Indépendance

Définition. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n -uplet de variables discrètes. Elles sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $k = (k_1, \dots, k_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$, $P(X = k) = \prod_{i=1}^n P(X_i = k_i)$.

Propriété. X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si pour toute famille K_1, \dots, K_n de parties de $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$, $P(X_1 \in K_1, \dots, X_n \in K_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in K_i)$.

Remarque. Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors elles sont 2 à 2 indépendantes, mais la réciproque est fautive.

Définition. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires discrètes, avec I de cardinal infini, on dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour toute partie finie J incluse dans I , les variables aléatoires X_j pour $j \in J$ sont mutuellement indépendantes.

Propriété. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de Ω dans E et F respectivement. Soit $f : E \rightarrow E'$ et $g : F \rightarrow F'$ deux fonctions. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont encore deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On peut généraliser l'énoncé et la démonstration au cas suivant : Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$ correctement définies, $(f_i(X_i))_{i \in I}$ est encore une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Corollaire. Soit $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. Alors pour toutes fonctions f et g correctement définies, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ sont indépendantes.

Remarque. Là encore, on peut généraliser ...

Propriété. Soit X_1, \dots, X_m des variables aléatoires entières mutuellement indépendantes. On suppose qu'il existe $p \in [0, 1]$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, où $n_i \in \mathbb{N}^*$ (p ne dépend pas de i). Alors $X_1 + \dots + X_m \sim \mathcal{B}(n_1 + \dots + n_m, p)$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On en déduit que le nombre de succès parmi une suite de m épreuves indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres m et p .

Exercice. Soit X_1, \dots, X_m des variables aléatoires entières mutuellement indépendantes telles que chaque X_i suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$. Montrer que $X = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(p_n) \in]0, 1[^\mathbb{N}$ telle que $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Alors X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Vue la démonstration, l'approximation de la loi de X_n par une loi de Poisson est d'autant plus valable que $k \ll n$ et $\lambda \ll n$.

Application : Dans une file d'attente, supposons que le nombre moyen d'individus arrivant entre les temps 0 et 1 vaut $\lambda > 0$. On note N la variable aléatoire égale au nombre d'individus arrivant dans la file d'attente entre les temps 0 et 1. On suppose que, pour n suffisamment grand, au plus un individu arrive entre les temps $\frac{i-1}{n}$ et $\frac{i}{n}$ (c'est l'hypothèse des événements rares). Alors N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Définition. Une loi discrète sur un ensemble E est la donnée d'une probabilité P sur E muni de sa tribu pleine $\mathcal{P}(E)$ telle que, en posant $S = \{x \in E / P(x) > 0\}$, on ait $\sum_{x \in S} P(\{x\}) = 1$. Alors S est au plus dénombrable et, pour tout $B \subset E$, $P(B) = P(B \cap S)$.