

# Feuille d'exercices 27.

## Corrigé de quelques exercices

### Événements

#### Exercice 27.6 :

2°) On montre que  $\mathbb{U} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} T_{2\pi\alpha}(V)$ . En effet :

◇ Soit  $z \in \mathbb{U}$ . Notons  $c$  la classe d'équivalence de  $z$ . Alors  $z \sim \alpha_c$ , donc il existe  $\theta \in \mathbb{Q}$  tel que  $z = e^{2i\pi\theta}\alpha_c \in T_{2\pi\theta}(V)$ . Ainsi,  $z \in \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} T_{2\pi\alpha}(V)$ , ce qui prouve que

$\mathbb{U} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} T_{2\pi\alpha}(V)$ . De plus, l'inclusion réciproque est évidente.

◇ Soit  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}$ . Supposons que  $T_{2\pi\alpha}(V) \cap T_{2\pi\alpha'}(V) \neq \emptyset$ .

Il existe  $\beta \in T_{2\pi\alpha}(V) \cap T_{2\pi\alpha'}(V)$ . Il existe alors  $c, c' \in \mathbb{U}/R$  tel que  $\beta = e^{2i\pi\alpha}\alpha_c$  et  $\beta = e^{2i\pi\alpha'}\alpha_{c'}$ . On en déduit que  $\alpha_c \sim \alpha_{c'}$ , donc par construction de  $V$ ,  $c = c'$ . Alors  $\alpha_c = \alpha_{c'}$ , puis  $e^{2i\pi\alpha} = e^{2i\pi\alpha'}$ . On en déduit que  $T_{2\pi\alpha}(V) = T_{2\pi\alpha'}(V)$ . Ceci prouve que  $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} T_{2\pi\alpha}(V)$  est une réunion disjointe.

Ainsi,  $\mathbb{U} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} T_{2\pi\alpha}(V)$ , mais  $\mathbb{Q}$  est dénombrable, donc par  $\sigma$ -additivité,

$1 = P(\mathbb{U}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} P(T_{2\pi\alpha}(V))$ , puis par hypothèse d'invariance de  $P$  par translation,

$1 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} P(V)$ . C'est impossible car si  $P(V) > 0$ , alors  $\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} P(V) = +\infty$  et si  $P(V) = 0$ ,

alors  $\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} P(V) = 0$ .

#### Exercice 27.7 :

1°) Notons  $B_n$  l'événement suivant : de l'urne choisie au hasard, on tire  $n$  fois de suite une boule blanche. Notons également  $U_k$  l'événement : l'urne choisie a pour numéro  $k$ . Les événements  $U_k$  constituent un système complet d'événements, donc d'après la for-

mule des probabilités totales,  $P(B_n) = \sum_{k=1}^N P(B_n|U_k)P(U_k) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n \frac{1}{N}$ .

L'énoncé nous demande de calculer  $P(B_{n+1}|B_n)$ . Par définition :

---


$$P(B_{n+1}|B_n) = \frac{P(B_{n+1} \cap B_n)}{P(B_n)} = \frac{P(B_{n+1})}{P(B_n)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n}.$$

2°) En tant que somme de Riemann  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ , donc la limite cherchée vaut  $\frac{n+1}{n+2}$ .

## Variables aléatoires

### Exercice 27.8 :

1°) En modélisant la situation à l'aide de variables aléatoires, l'indice  $I$  de l'urne choisie vérifie  $I \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ , et la couleur  $C$  de la boule tirée (en convenant que  $C = 1$  si la boule tirée est noire et que  $C = 0$  sinon) vérifie : la loi de " $C$  sachant que  $I = 1$ " est  $\mathcal{B}(\frac{n_1}{n_1 + b_1})$  et la loi de " $C$  sachant que  $I = 2$ " est  $\mathcal{B}(\frac{n_2}{n_2 + b_2})$ .

La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(C = 1) &= P(C = 1|I = 1)P(I = 1) + P(C = 1|I = 2)P(I = 2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{n_1}{n_1 + b_1} + \frac{n_2}{n_2 + b_2} \right). \end{aligned}$$

2°) Pour répondre à la deuxième question on applique la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(I = i | C = 1) &= \frac{P(I = i)P(C = 1 | I = i)}{P(I = 1)P(C = 1 | I = 1) + P(I = 2)P(C = 1 | I = 2)} \\ &= \frac{\frac{n_i}{n_1 + b_1}}{\frac{n_1}{n_1 + b_1} + \frac{n_2}{n_2 + b_2}}. \end{aligned}$$

### Exercice 27.9 :

$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{P(X_1 = k, X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)}$ , or  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants,

et on sait que  $X_1 + X_2$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n_1 + n_2, p)$ , donc pour  $k \in [\max(0, n - n_2), \min(n, n_1)]$  (sinon la probabilité est nulle),

$$\begin{aligned} P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{\binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2-n+k}}{\binom{n_1 + n_2}{n} p^n (1-p)^{n_1+n_2-n}}, \\ \text{donc } P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1 + n_2}{n}}. \end{aligned}$$

---

Il s'agit d'une loi hypergéométrique, mais l'appellation est hors programme. Cela correspond, pour un tirage sans remise de  $n$  boules dans une urne de  $n_1 + n_2$  boules dont  $n_1$  sont de couleur 1 et  $n_2$  de couleur 2 (ici il s'agit des  $n$  "boules" qui ont réussi le test 1 ou le test 2, chacun de proba  $p$ ), à la probabilité de tirer  $k$  boules de couleur 1.

**Exercice 27.10 :**

1°)  $(Y_3 \leq k) = (X_1 \leq k) \cap (X_2 \leq k) \cap (X_3 \leq k)$ , or les variables aléatoires sont indépendantes, et  $P(X_i \leq k) = \frac{k}{n}$ , donc  $P(Y_3 \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^3$  (également vrai pour  $k = 0$ ).

Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $P(Y_3 = k) = P(Y_3 \leq k) - P(Y_3 \leq k - 1) = \left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3$ .

2°)  $(Y_1 \geq k) = (X_1, X_2, X_3 \geq k)$ , or les variables aléatoires sont indépendantes, donc  $P(Y_1 \geq k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^3$  (également vrai pour  $k = n + 1$ ).

Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $P(Y_1 = k) = P(Y_1 \geq k) - P(Y_1 \geq k + 1) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^3$ .

3°) a) Posons  $T_i = \mathbf{1}_{X_i \leq k}$  :  $T_i$  est un test de Bernoulli, donc  $T_i \sim B\left(\frac{k}{n}\right)$ . De plus,  $T_1, T_2, T_3$  sont indépendants, donc d'après le cours,  $Z_k = T_1 + T_2 + T_3 \sim B\left(3, \frac{k}{n}\right)$ .

Ainsi, pour tout  $h \in \{0, \dots, 3\}$ ,  $P(Z_k = h) = \binom{3}{h} \left(\frac{k}{n}\right)^h \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{3-h}$ .

b)  $[Z_k \geq 2]$  correspond à l'événement "deux ou trois indices  $i$  sont tels que  $X_i \leq k$ ", donc  $[Z_k \geq 2] = [Y_2 \leq k]$ . Ainsi,  $P(Y_2 \leq k) = 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{n-k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^3$ .

**Exercice 27.11 :**

1°) a)

◇ Si  $X_n = 0$ , à l'instant  $n$ , les deux boules noires sont dans l'urne  $U$  et les deux boules blanches dans  $V$ , donc à l'instant  $n + 1$ , de manière certaine, les urnes  $U$  et  $V$  contiendront toutes deux une boule blanche et une boule noire.

Ainsi, lorsque  $P(X_n = 0) > 0$ ,  $P(X_{n+1} = i | X_n = 0)$  vaut 0 si  $i \neq 1$  et vaut 1 si  $i = 1$ .

On peut mener un raisonnement similaire lorsque  $X_n = 2$ , donc  $P(X_{n+1} = i | X_n = 2)$  vaut 0 si  $i \neq 1$  et vaut 1 si  $i = 1$ .

◇ Si  $X_n = 1$ , les urnes  $U$  et  $V$  contiennent chacune une boule blanche et une boule noire. Pour obtenir  $X_n = 2$ , il est nécessaire de tirer la boule noire dans l'urne  $U$  (avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ) et la boule blanche dans l'urne  $V$  (aussi avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ). Les deux tirages étant indépendants,  $P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) = \frac{1}{4}$ .

De même,  $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \frac{1}{4}$ .

De plus, lorsque  $P(X_n = 1) > 0$ ,

$$1 = P(X_{n+1} \in \{0, 1, 2\} | X_n = 1) = \sum_{j=0}^2 P(X_{n+1} = j | X_n = 1),$$

donc  $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = \frac{1}{2}$ .

b) Soit  $i \in \{1, 2, 3\}$  :

---

$[C_{n+1}]_i = P(X_{n+1} = i - 1) = \sum_{j=0}^2 P(X_{n+1} = i - 1, X_n = j)$  d'après la formule des

probabilités totales. Lorsque  $P(X_n = j) > 0$ ,

$$P(X_{n+1} = i - 1, X_n = j) = P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = j)P(X_n = j) = M_{i,j+1}P(X_n = j).$$

Lorsque  $P(X_n = j) = 0$ , on a encore  $P(X_{n+1} = i - 1, X_n = j) = 0 = M_{i,j+1}P(X_n = j)$ ,

$$\text{donc } [C_{n+1}]_i = \sum_{j=0}^2 M_{i,j+1}P(X_n = j) = \sum_{j=1}^3 M_{i,j}[C_n]_j, \text{ donc } C_{n+1} = MC_n.$$

Par récurrence, on montre alors facilement que  $C_n = M^n C_0$ .

2°) Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/4 & 0 \\ -1 & \lambda - 1/2 & -1 \\ 0 & -1/4 & \lambda \end{vmatrix}$ , donc d'après la formule de Sarrus,

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}).$$

Soit  $n \geq 1$  : la division euclidienne de  $X^n$  par  $\chi_M(X)$  s'écrit

$$(1) : X^n = \chi_M(X)Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I_3$ .

En remplaçant dans (1)  $X$  par les valeurs propres de  $M$ , on obtient :  $0 = c_n$ ,  $1 = a_n + b_n$ ,

$$(-\frac{1}{2})^n = \frac{a_n}{4} - \frac{b_n}{2} = \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{2}, \text{ donc } c_n = 0, a_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n, b_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n.$$

Or  $C_n = M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc  $C_n$  est la troisième colonne de  $M^n = a_n M^2 + b_n M$ , mais vue

la dernière colonne de  $M$ , la troisième colonne de  $M^2$  est égale à la seconde colonne de

$$M, \text{ donc } C_n = [\frac{2}{3} + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n] \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + [\frac{1}{3} - \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6}$

et  $P(X_n = 1) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$ .

**Remarque.** c'est une variante des urnes d'Ehrenfest. Si l'on remplace 2 boules par  $N$  boules, le modèle est plus complexe, mais il permet de modéliser la notion d'irréversibilité.

### Exercice 27.12 :

1°)  $P(S_n = 0, Z_n = 0) \leq P(n = S_n + Z_n = 0) = 0$ , mais

$P(S_n = 0)P(Z_n = 0) = P(S_n = 0)P(S_n = n) = (1 - p)^n p^n \neq 0$ , donc  $S_n$  et  $Z_n$  ne sont pas indépendantes.

2°) Pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,  $(S = s) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S = s, N = n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S_n = s, N = n)$ .

On note  $\Omega$  l'univers de définition de toutes les variables aléatoires de l'énoncé et  $\mathcal{F}$  la tribu utilisée sur  $\Omega$ . Si l'on admet que  $S_n$  est une variable aléatoire (comme somme

finie de variables aléatoires), alors  $(S_n = s) \cap (N = n) \in \mathcal{F}$ , donc  $(S = s) \in \mathcal{F}$ , ce qui prouve que  $S$  est bien une variable aléatoire. Alors  $Z = N - S$  est aussi une variable aléatoire.

3°) Soit  $k, l \in \mathbb{N}$ . Soit  $\omega \in \Omega$  :

$$\omega \in (S = k, Z = l) \iff S(\omega) = k, S(\omega) + Z(\omega) = k + l$$

$$\iff N(\omega) = k + l, S_{k+l}(\omega) = k, \text{ donc}$$

$$P(S = k, Z = l) = P(N = k + l, S_{k+l} = k) = P(N = k + l)P(S_{k+l} = k),$$

car  $N$  et  $S_{k+l}$  sont indépendantes,

$$\text{donc } P(S = k, Z = l) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} \binom{k+l}{k} p^k (1-p)^l = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}.$$

Ainsi, il existe deux suites  $(a_k)$  et  $(b_l)$  dans  $\mathbb{R}_+$  telles que, pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$ ,

$$P(S = k, Z = l) = a_k b_l, \text{ avec } a_k = e^{-p\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \text{ et } b_l = e^{(1-p)\lambda} \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}.$$

$$\text{Alors } P(S = k) = \sum_{l=0}^{+\infty} P(S = k, Z = l) = a_k \sum_{l=0}^{+\infty} b_l = a_k \text{ et de même } P(Z = l) = b_l.$$

Alors  $P(Z = l)P(S = k) = a_k b_l = P(Z = l, S = k)$ , ce qui prouve que  $S$  et  $Z$  sont indépendantes.

On a  $P(S = k) = a_k$ , donc  $S \sim \mathcal{P}(p\lambda)$  et  $Z \sim \mathcal{P}((1-p)\lambda)$ .

## Espérance

### Exercice 27.13 :

Pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ , notons  $B_i$  l'événement "la boule numéro  $i$  est marquée".

Pour tout  $j \in \mathbb{N}_n$ , notons  $T_{i,j}$  une variable aléatoire de Bernoulli qui teste si, lors du  $j$ -ème tirage, c'est la boule  $i$  qui est tirée.

Pour tout  $i, j \in \mathbb{N}_n$ ,  $T_{i,j} \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}_n$ . Les événements  $(T_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$  sont mutuellement indépendants, donc en

posant  $Y_i = \sum_{j=1}^n T_{i,j}$ ,  $Y_i$  représente le nombre de fois que la boule  $i$  est marquée, et

d'après le cours,  $Y_i \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$ .

Alors,  $P(B_i) = P(Y_i \geq 1) = 1 - P(Y_i \leq 0) = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n$ .

Posons  $X_i = 1_{B_i}$ . Ainsi,  $X_i \sim \mathcal{B}(1 - (1 - \frac{1}{n})^n)$ .

Le nombre de boules marquées est  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Il faut comprendre que l'énoncé s'intéresse à l'espérance de  $X$ . Par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n(1 - (1 - \frac{1}{n})^n), \text{ or } (1 - \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{n(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e},$$

donc  $E(X) \sim n(1 - \frac{1}{e})$ .

---

**Exercice 27.14 :**

1°) Pour la  $k$ -ième personne  $P_k$ , on note  $X_{n,k}$  la variable aléatoire égale au nombre de lettres qu'elle reçoit.

$X_{n,k}$  peut être considérée comme la somme de  $(n-1)$  variables de Bernoulli indépendantes associées à chaque personne de la communauté (valant 1 si cette personne envoie la lettre à  $P_k$ , 0 sinon).

Par suite,  $X_{n,k}$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n-1, \frac{1}{n-1})$ , donc pour tout  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ,

$$p_{j,n} = P(X_{n,k} = j) = \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{n-1}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1-j}.$$

À  $j$  fixé, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$p_{j,n} = \frac{(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-j)}{(n-1)(n-1) \times \dots \times (n-1)} \frac{1}{j!} e^{(n-1)\ln(1-\frac{1}{n-1})} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{-j} \sim \frac{e^{-1}}{j!},$$
 ce qui correspond à une loi de Poisson de paramètre 1.

Nous avons redémontré un résultat classique d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, valable ici car  $(n-1)\frac{1}{n-1} = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

2°) On note  $D_j$  : "au moins une personne reçoit  $j$  lettres". On a  $D_j = \bigcup_{k=1}^n \{X_{n,k} = j\}$ .

Pour  $j > n/2$ , on sait que cette union est disjointe puisque seule une personne au plus du groupe peut être dans ce cas.

$$D'où  $P(D_j) = nP(X_{n,k} = j) = n \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{n-1}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1-j}$ .$$

**Exercice 27.15 :**

1°) Soit  $i \in \mathbb{N}_N$ .  $X_i$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et  $P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

donc lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$ , puis

$$P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n.$$

2°) a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\omega \in (Y > n) \iff Y(\omega) > n \iff \forall i \in \mathbb{N}_N, X_i(\omega) > n,$$

donc  $P(Y > n) = P(X_1 > n, \dots, X_N > n)$ , puis d'après l'indépendance mutuelle de

$$X_1, \dots, X_N, P(Y > n) = \prod_{i=1}^N P(X_i > n) = q^{nN} \text{ d'après la question précédente.}$$

On en déduit que  $P(Y \leq n) = 1 - q^{nN}$ , ce qui est également vrai lorsque  $n = 0$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P(Y = n) = P((Y \leq n) \setminus (Y \leq n-1)) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = (q^N)^{n-1} (1 - q^N).$$

b) Ainsi,  $Y \sim \mathcal{G}(1 - q^N)$ , donc d'après le cours,  $Y$  est d'espérance finie

$$\text{et } E(Y) = \frac{1}{1 - q^N}.$$

On peut expliquer sans calcul pourquoi  $Y$  suit une loi géométrique :

Pour tout  $i \in \mathbb{N}_N$ , sans modifier la loi de  $X_i$ , on peut supposer que la variable aléatoire  $X_i$  représente l'instant de premier succès d'une série de tests mutuellement indépendants de paramètre  $p$ . Considérons que ces  $N$  séries de tests sont réalisés en parallèle et que l'on s'arrête dès l'instant où l'un des tests est un succès. Cela revient à considérer que l'on effectue un nouveau test, qui se réalise si et seulement si parmi les  $N$  anciens tests, l'un au moins se réalise. Ainsi, le nouveau test est un échec avec une probabilité de  $(1-p)^N$ , donc est un succès avec une probabilité de  $1-q^N$ .  $Y$  représente l'instant de premier succès de ce nouveau test, il est donc naturel que  $Y \sim \mathcal{G}(1-q^N)$ .

**Exercice 27.16 :**

1°) Notons  $S$  le nombre de canards survivants. On a  $S = \sum_{c \in \mathcal{C}} 1_{c \text{ survit}}$

où  $\mathcal{C}$  désigne l'ensemble des canards.

Par linéarité de l'espérance,  $E(S) = \sum_{c \in \mathcal{C}} E(1_{c \text{ survit}}) = \sum_{c \in \mathcal{C}} P(c \text{ survit})$ .

Fixons  $c \in \mathcal{C}$ . Notons  $X$  le nombre de tirs réussis sur  $c$ . Chaque chasseur tire sur le canard  $c$  avec une probabilité de l'atteindre égale à  $\frac{p}{20}$  et les chasseurs agissent indépendamment les uns des autres, donc d'après le cours,  $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{p}{20})$ .

Alors  $P(c \text{ survit}) = P(X = 0) = (1 - \frac{p}{20})^{10}$ , puis  $E(S) = 20(1 - \frac{p}{20})^{10}$ .

2°) Notons  $T$  le nombre de canards touchés. L'énoncé nous demande de calculer  $E(T)$ .

D'après le cours,  $E(T) = \sum_{t=0}^{+\infty} tP(T = t)$ , or d'après la formule des probabilités totales,

$$P(T = t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = t \mid N = n)P(N = n), \text{ où } N \text{ est le nombre de canards.}$$

Alors, en utilisant la formule de Fubini pour des familles dénombrables de réels positifs,

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)E(T \mid N = n),$$

$$\text{en convenant que } E(T \mid N = n) = \sum_{t=0}^{+\infty} tP(T = t \mid N = n).$$

On sait que  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  où l'on a posé  $\lambda = 15$ .

$$\text{On obtient ainsi que } E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} n(1 - (1 - \frac{p}{20})^{10}).$$

**Exercice 27.17 :**

1°) La probabilité étant uniforme,  $P(G) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ .

Choisir un élément de  $\Omega$  revient à choisir l'ensemble  $A$  de ses arêtes avec les contraintes  $\text{Card}(A) = m$  et  $A \subset \{(i, j) / 1 \leq i < j \leq n\}$ , donc cela revient à choisir  $m$  éléments parmi  $N = \binom{n}{2}$ . Ainsi  $P(G) = \frac{1}{\binom{N}{m}}$ .

2°)  $i \sim j$  est donc l'ensemble des graphes de  $\Omega$  possédant l'arête  $(i, j)$ . Choisir un tel graphe revient à choisir les  $m - 1$  autres arêtes parmi les  $N - 1$  arêtes disponibles.

$$\text{Ainsi } P(i \sim j) = \sum_{\omega \in (i \sim j)} P(\omega) = \frac{\text{Card}(i \sim j)}{\binom{N}{m}} = \frac{\binom{N-1}{m-1}}{\binom{N}{m}}, \text{ donc } P(i \sim j) = \frac{m}{N}.$$

3°) On suppose que  $m, n \geq 3$ , sans quoi l'espérance est nulle.

Notons  $K$  ce nombre de triangles, qui est donc une variable aléatoire de  $\Omega$  dans  $\mathbb{N}$ .

On a  $K = \sum_{\substack{\{x,y,z\} \subset S \\ x,y,z \text{ distincts}}} 1_{x \sim y, y \sim z, z \sim x}$ , donc par linéarité de l'espérance,

$$E(K) = \sum_{\substack{\{x,y,z\} \subset S \\ x,y,z \text{ distincts}}} E(1_{x \sim y, y \sim z, z \sim x}) = \sum_{\substack{\{x,y,z\} \subset S \\ x,y,z \text{ distincts}}} P(x \sim y, y \sim z, z \sim x).$$

Le même argument utilisé en question 2 prouve que

$$P(x \sim y, y \sim z, z \sim x) = \frac{\binom{N-3}{m-3}}{\binom{N}{m}} = \frac{m(m-1)(m-2)}{N(N-1)(N-2)},$$

$$\text{donc } E(K) = \binom{n}{3} \frac{m(m-1)(m-2)}{N(N-1)(N-2)}.$$

## Variance

### Exercice 27.18 :

La théorie des familles sommables de réels positifs justifie les inégalités suivantes :

Pour  $h \in \{1, \dots, k-1\}$ , d'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned} E(|X|^h) &= \sum_{x \in X(\Omega)} |x|^h P(X = x) \\ &\leq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq 1}} |x|^h P(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leq 1}} |x|^h P(X = x) \\ &\leq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq 1}} |x|^k P(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leq 1}} P(X = x) \\ &\leq \sum_{x \in X(\Omega)} |x|^k P(X = x) + \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) \\ &= E(|X|^k) + 1. \end{aligned}$$

### Exercice 27.19 :

1°)  $Y_i$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , donc  $Y_i \sim \mathcal{B}(q)$ , où

$q = P(Y_i = 1) = P(X_i = X_{i+1} = 1) = p^2$  car  $X_i$  et  $X_{i+1}$  sont indépendantes.

En conclusion,  $Y_i \sim \mathcal{B}(p^2)$ .

2°) Par linéarité de l'espérance,  $E(Y) = \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i)$ , or d'après le cours,  $E(Y_i) = p^2$ , donc  $E(Y) = (n-1)p^2$ .

3°) Si  $n \leq 1$ ,  $Y = 0$  et  $V(Y) = 0$ .  
Si  $n = 2$ ,  $Y = Y_1$  et  $V(Y) = V(Y_1) = p^2(1-p^2)$ .  
Pour la suite, on suppose que  $n \geq 3$ .

D'après le cours,  $V(Y) = \sum_{i=1}^{n-1} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$ .

De plus, si  $i, j \in \mathbb{N}_{n-1}$  avec  $i+1 < j$ , alors  $Y_i = X_i X_{i+1}$  et  $Y_j = X_j X_{j+1}$  sont indépendantes d'après le lemme de coalition, donc  $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ .

Ainsi,  $V(Y) = (n-1)p^2(1-p^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}_{n-2}$ . D'après la formule de Koenig-Huygens,  $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_i Y_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})$ , or, en tenant compte du fait que  $X_{i+1}$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , on a  $X_{i+1}^2 = X_{i+1}$ , donc  $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(X_i X_{i+1} X_{i+2}) - p^4$ , mais  $X_i X_{i+1} X_{i+2}$  est encore à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , donc  $E(X_i X_{i+1} X_{i+2}) = P(X_i X_{i+1} X_{i+2} = 1) = p^3$ . Ainsi,  $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 - p^4$ , puis  $V(Y) = (n-1)(p^2 - p^4) + 2(n-2)(p^3 - p^4) = (n-1)p^2 + 2(n-2)p^3 - (3n-5)p^4$ .

**Exercice 27.20 :**

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n X_{\sigma(j),j},$$

donc par linéarité de l'espérance puis indépendance des  $X_{\sigma(j),j}$ ,

$$E(\det(M)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n E(X_{\sigma(j),j}) = 0.$$

Ainsi d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\text{Var}(\det(M)) = E([\det(M)]^2) = E\left(\sum_{\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^n X_{\sigma(j),j} X_{\sigma'(j),j}\right).$$

Soit  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$  telle que  $\sigma \neq \sigma'$  :

$$E\left(\prod_{j=1}^n X_{\sigma(j),j} X_{\sigma'(j),j}\right) = E\left(\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \sigma(j) = \sigma'(j)}} X_{\sigma(j),j}^2 \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \sigma(j) \neq \sigma'(j)}} X_{\sigma(j),j} X_{\sigma'(j),j}\right).$$

Le premier produit vaut 1 et le second est un produit non vide de variables aléatoires mutuellement indépendantes,

$$\text{donc } E\left(\prod_{j=1}^n X_{\sigma(j),j} X_{\sigma'(j),j}\right) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \sigma(j) \neq \sigma'(j)}} E(X_{\sigma(j),j}) E(X_{\sigma'(j),j}) = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Var}(\det(M)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)^2 E\left(\prod_{j=1}^n X_{\sigma(j),j}^2\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} E(1) = n!.$$

---

**Exercice 27.21 :**

1°) Si l'on reprend la démonstration de la loi faible des grands nombres, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne  $P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}$ , or  $E(S_n) = E(X_1) = 0$  et  $\text{Var}(S_n) = \frac{1}{n}\text{Var}(X_1)$  où  $\text{Var}(X_1) = E(X_1^2) = 1$ , donc  $P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ . Avec  $n = 10\,000$  et  $\varepsilon = 0,1$ , on obtient bien  $P(|S_{10\,000}| \geq 0,1) \leq \frac{1}{100}$ .

2°) Soit  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$P(X \geq a) \leq P(e^{tX} \geq e^{ta})$ , donc d'après l'inégalité de Markov,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta+H(t)}, \text{ puis en travaillant dans } \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

$\ln[P(X \geq a)] \leq -ta + H(t)$ , donc par passage à la borne inférieure,

$$\ln[P(X \geq a)] \leq \inf_{t \geq 0}(-ta + H(t)), \text{ ce qui permet de conclure.}$$

3°) Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$e^{H(t)} = E(e^{tS_n}) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{t}{n}X_i}\right), \text{ donc d'après l'indépendance mutuelle des } X_i,$$

$$e^{H(t)} = \prod_{i=1}^n E(e^{\frac{t}{n}X_i}), \text{ puis d'après la formule de transfert,}$$

$$e^{H(t)} = \prod_{i=1}^n \left(e^{-\frac{t}{n}} \times \frac{1}{2} + e^{\frac{t}{n}} \times \frac{1}{2}\right) = \text{ch}\left(\frac{t}{n}\right)^n, \text{ donc } H(t) = n \ln \text{ch}\left(\frac{t}{n}\right).$$

4°) Les questions 2 et 3 donnent :  $P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{\inf_{t \geq 0}(n \ln \text{ch}(\frac{t}{n}) - t\varepsilon)}$ .

Supposons que  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Posons  $f_n(t) = n \ln \text{ch}\left(\frac{t}{n}\right) - t\varepsilon$  :

$$f'_n(t) = \frac{\text{sh}\frac{t}{n}}{\text{ch}\frac{t}{n}} - \varepsilon = \text{th}\frac{t}{n} - \varepsilon, \text{ donc } f'_n(t) = 0 \iff t = n \operatorname{argth}\varepsilon = \frac{n}{2} \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

Posons  $t_0 = n \ln \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$  :  $f'_n(t)$  est négatif entre 0 et  $t_0$  puis positif,

donc  $\inf_{t \geq 0} f_n(t) = f_n(t_0) = n \ln(\text{ch}(\operatorname{argth}\varepsilon)) - \varepsilon t_0$ .

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x, \text{ donc } \text{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}.$$

$$\text{On en déduit que } \inf_{t \geq 0} f_n(t) = -\frac{n}{2} \left( \ln(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \right).$$

Avec  $n = 10\,000$  et  $\varepsilon = 0,1$ , on calcule  $f_n(t_0) = -50,0837 \pm 10^{-4}$ ,

donc  $P(S_{10\,000} \geq 0,1) \leq 1,8 \times 10^{-22}$ .

De plus  $-S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-X_i)$ , mais  $-X_i$  suit la même loi que  $X_i$  et les  $-X_i$  sont mu-

tuellement indépendantes, donc la question 3 est encore valable pour  $X = -S_n$  et on en déduit  $P(-S_{10\,000} \geq 0,1) \leq 1,8 \times 10^{-22}$ .

Or  $(|S_n| \geq 0,1) = (S_n \geq 0,1) \cup (-S_n \geq 0,1)$ ,

donc  $P(|S_n| \geq 0,1) \leq P(S_n \geq 0,1) + P(-S_n \geq 0,1) \leq 3,6 \times 10^{-22}$ .

On obtient ainsi une majoration bien meilleure que celle de la première question.

## Sommes de Riemann

### Exercice 27.22 :

[  $\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt$  désigne la valeur moyenne de  $g(t)$  lorsque  $t$  décrit  $[a, b]$ . Il s'agit donc de montrer que l'image par  $f$  de la moyenne des  $g(t)$  est inférieure à la moyenne des images par  $f$  des  $g(t)$ . Mais cette propriété est connue pour la moyenne d'un nombre fini de valeurs, d'après la convexité de  $f$ . Il reste à passer des sommes finies aux intégrales. C'est possible car une intégrale peut être vue comme limite de sommes finies.]

On sait que la somme de Riemann  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n g(a + k \frac{b-a}{n})$  tend vers  $\int_a^b g(t)dt$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . De même,  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \circ g(a + k \frac{b-a}{n})$  tend vers  $\int_a^b f \circ g(t)dt$ . De plus,  $f$  est convexe, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(a + k \frac{b-a}{n})\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(g(a + k \frac{b-a}{n})\right).$$

$f$  étant continue, lorsque l'on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient l'inégalité de Jensen.

### Exercice 27.23 :

[La présence d'une racine  $n^{\text{ème}}$  et d'un produit nous incite à passer aux logarithmes.]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $x_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$  et  $y_n = \ln(x_n)$ .

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \text{ où } f : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1 + x^2) \end{array}.$$

$y_n$  est une somme de Riemann, donc  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)dt$ .

[Pour calculer cette intégrale, on gère la présence du logarithme en intégrant par parties.]

Intégrons par parties.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt &= [x \ln(1 + x^2)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{2x}{1 + x^2} dx \\ &= \ln(2) + \int_0^1 2 \left( \frac{1}{1 + x^2} - 1 \right) dx \\ &= \ln(2) - 2 + 2[\arctan(x)]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2\sqrt{e^\pi}e^{-2})$  or  $x_n = e^{y_n}$ , donc  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{e^\pi}}{e^2}$ .

---

**Exercice 27.24 :**

1°)  $f$  étant continue sur le compact  $K = [\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}]$ , elle est bornée et elle atteint ses bornes. On peut donc noter  $m = f(\alpha)$  le minimum de  $f$  sur  $K$  et  $M = f(\beta)$  le maximum de  $f$  sur  $K$ . Alors

$$f(\alpha) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(nx)| dx \leq f(\beta) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx. \text{ Or } \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx > 0,$$

en tant qu'intégrale d'une application continue positive et non identiquement nulle, donc le quotient  $\frac{\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(nx)| dx}{\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx}$  est compris entre

$f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ , mais  $f$  est continue, donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe  $\alpha_k \in K$  tel que  $\frac{\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(nx)| dx}{\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx} = f(\alpha_k)$ .

En adaptant cette démonstration, on peut prouver la formule de la moyenne : Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a < b$ ) telles que  $f$  est continue et  $g$  positive. Alors il existe  $\gamma \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(\gamma) \int_a^b g(t) dt$ .

$$2^\circ) \int_0^\pi f(x) |\sin nx| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(nx)| dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx.$$

Soit  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . L'application  $x \mapsto \sin(nx)$  étant de signe constant sur l'intervalle  $[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}]$ ,

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx = \left| \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \sin(nx) dx \right| = \left| \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \right| = \frac{2}{n},$$

donc  $\int_0^\pi f(x) |\sin nx| dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \frac{2}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} f(\alpha_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$ , d'après le cours sur les sommes de Riemann.