Résumé de cours :
Semaine 35, du 22 juin au 24.

Première partie
Les probabilités (fin)

1 Variables aléatoires indépendantes (fin)

Théorème. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{L}_n$ une loi discrète sur E_n. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{L}_n$.

Remarque. Ce théorème prouve l'existence d'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, où $p \in]0,1[$ ne dépend pas de n. Cette suite modélise une succession infinie d'épreuves indépendantes qui ont toutes la même probabilité de succès, égale à p.

Propriété. Avec les notations de cette remarque, si X est la variable aléatoire égale à l'instant du premier succès : $X(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^*/X_k(\omega) = 1\}$. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

2 L'espérance

Définition. Soit X est une variable aléatoire discrète à valeurs réelles.
◇ Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $E(X) \triangleq \sum_{d\in X(\Omega)} d.P(X = d) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
◇ Sinon, on dit que X est d'espérance finie si et seulement si $(d.P(X = d))_{d\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas, $E(X) \triangleq \sum_{d\in X(\Omega)} d.P(X = d)$.

Remarque. $E(X)$ ne dépend que de la loi de X.

Propriété. Si Ω est fini ou dénombrable, alors $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.

Propriété. Si A est un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
alors $\boxed{P(A) = E(1_A)}$, où 1_A désigne la fonction caractéristique de la partie A de Ω.

Définition. Une variable aléatoire réelle est dite centrée si et seulement si $E(X) = 0$.

> **Exercice.** Montrer qu'une variable aléatoire réelle et positive est centrée si et seulement si elle est nulle presque sûrement.
> Il faut savoir le démontrer.

Théorème de transfert : Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. $g(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(g(d).P(X = d))_{d \in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas, $E(g(X)) = \sum_{d \in X(\Omega)} g(d)P(X = d)$. Il faut savoir le démontrer.

Linéarité de l'espérance :
On note $L^1(\Omega, P)$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes de Ω dans $\mathbb{R}$ d'espérance finie.
$L^1(\Omega, P)$ est un espace vectoriel et pour tout $X, Y \in L^1(\Omega, P)$, $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $X \in L^1(\Omega, P)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b \in L^1(\Omega, P)$ et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Propriété. Soit $X \in L^1(\Omega, P)$. Si X est presque sûrement constante égale à c, alors $E(X) = c$.
X est presque sûrement constante si et seulement si X est presque sûrement égale à son espérance.

Propriété. $X \geq 0 \Longrightarrow E(X) \geq 0$.

Propriété. Croissance de l'espérance : si $X, Y \in L^1$, alors $X \leq Y \Longrightarrow E(X) \leq E(Y)$.

Propriété. Inégalité triangulaire : $X \in L^1 \Longleftrightarrow |X| \in L^1$ et dans ce cas, $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Propriété de comparaison : Soit X une variable aléatoire discrète complexe et $Y \in L^1$ telles que $|X| \leq Y$. Alors $X \in L^1$.

Formule. Inégalité de Markov : Si $X \geq 0$ et $a > 0$, alors $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Si $X_1, \dots, X_k$ sont k variables aléatoires discrètes réelles d'espérances finies et **mutuellement indépendantes**, alors $X_1 \times \cdots \times X_k$ est d'espérance finie et
$E(X_1 \times \cdots \times X_k) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_k)$. La réciproque est fausse.
Il faut savoir le démontrer.

3 La variance

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle. Si X^k est d'espérance finie, on dit que $E(X^k)$ est le moment d'ordre k de X.

Notation. On note $L^2(\Omega, P)$ l'ensemble des variables aléatoires X discrètes à valeurs réelles possédant un moment d'ordre 2, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Lemme : Si $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$, alors $X_1 X_2 \in L^1(\Omega, P)$.

Corollaire. $L^2(\Omega, P)$ est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega, P)$.

Définition. Si $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$, la covariance est $Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$.

Propriété. Cov est une forme bilinéaire symétrique positive sur $L^2(\Omega, P)$, mais ce n'est pas un produit scalaire.

Définition. Si $X \in L^2(\Omega, P)$, la variance de X est $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$.
L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

Remarque. $Var(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.

Définition. X est réduite si et seulement si $X \in L^2(\Omega, P)$ et $Var(X) = 1$.

Propriété. Formule de Koenig-Huygens : Si $X \in L^2(\Omega, P)$, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
Si $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$, alors $Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$: donc, si deux variables aléatoires de $L^2(\Omega, P)$ sont indépendantes, elles sont orthogonales au sens de Cov (la réciproque est fausse).

Propriété. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $X \in L^2(\Omega, P)$, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Propriété. Si $X \in L^2(\Omega, P)$ avec $\sigma(X) \neq 0$, alors $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Propriété.
◇ Si $X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$, $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$.

◇ Si $X_1, \ldots, X_k \in L^2(\Omega, P)$, $Var(X_1 + \cdots + X_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} Cov(X_i, X_j)$.

◇ Si $X_1, \ldots, X_k$ sont k variables aléatoires de $L^2(\Omega, P)$ que l'on suppose **deux à deux indépendantes**, alors $Var(X_1 + \cdots + X_k) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_k)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $X, Y \in L^2(\Omega, P)$, $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$, avec égalité ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha X + \beta Y$ est presque sûrement nulle.
pour tout $X, Y \in L^2(\Omega, P)$, $Cov(X, Y)^2 \leq Var(X)Var(Y)$, avec égalité ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha X + \beta Y$ est presque sûrement constante.

Définition. (hors programme) : Soient $X, Y \in L^2(\Omega, P)$ telles que $Var(X)Var(Y) > 0$. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est $Corr(X, Y) \triangleq \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Propriété. $Corr(X, Y) \in [-1, 1]$.

Propriété. $|Corr(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(Y = aX + b) = 1$.

Remarque. $Corr(X, Y)$ indique dans quelle mesure Y dépend **linéairement** de X, mais $Corr(X, Y)$ ne mesure pas les dépendances non linéaires (on peut avoir par exemple $Corr(X, X^2) = 0$).

Formule. Espérance et variance pour les lois au programme.
◇ **Loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$: $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
$\boxed{E(X) = p \text{ et } Var(X) = p(1 - p)}$.
◇ **Loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$: Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ (et $P(X = m) = 0$ pour $m \notin \{0, \ldots, n\}$).
$\boxed{E(X) = np \text{ et } Var(X) = np(1 - p)}$.
◇ **Loi géométrique** de paramètre $p \in]0, 1[$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$ (et $P(X = 0) = 0$). $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{p} \text{ et } Var(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}}$.
◇ **Loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$. $E(X) = \lambda = Var(X)$.
Il faut savoir le démontrer.

4 Propriétés de convergence

Formule. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Soit X une variable aléatoire réelle. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. (hors programme) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. X_n converge vers X en probabilité ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème. **Loi faible des grands nombres :**

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires dans $L^2(\Omega, P)$ que l'on suppose toutes de même loi et deux à deux indépendantes. Posons $\mu = E(X_n)$, qui est indépendante de n. Alors $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à μ.
Il faut savoir le démontrer.

Deuxième partie
Théorie de l'intégration

Notation. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, E est un Banach, i.e un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet, f est une application de $[a, b]$ dans E.

5 Intégration des applications en escalier

5.1 Les applications en escalier

Définition. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $(a_i)_{0 \le i \le n}$ de réels telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.

Notation. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exemple. $\left(a + i\dfrac{b-a}{n}\right)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$. On dit que c'est une subdivision uniforme.

Définition. Le pas de $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$ est $\delta(\sigma) = \max_{1 \le i \le n}(a_i - a_{i-1})$.

Notation. Le support de la subdivision σ est l'ensemble $A(\sigma) \triangleq \{a_i \ / \ 0 \le i \le n\}$.

Propriété. Notons $\mathcal{P}_f([a, b])$ l'ensemble des parties finies de $[a, b]$ contenant a et b.

L'application $\begin{array}{rccl} A : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{P}_f([a, b]) \\ & \sigma & \longmapsto & A(\sigma) \end{array}$ est bijective.

Définition. $\sigma \in \mathcal{S}$ est plus fine que $\sigma' \in \mathcal{S}$ ssi $A(\sigma) \supseteq A(\sigma')$. Dans ce cas, on note $\sigma' \preceq \sigma$.

Propriété. $\preceq$ est une relation d'ordre partiel.

Définition. Si $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$, on pose $\sigma \cup \sigma' \triangleq A^{-1}(A(\sigma) \cup A(\sigma'))$: c'est l'unique subdivision de $[a, b]$ dont le support est la réunion des supports de σ et de σ'. C'est $\sup\{\sigma, \sigma'\}$.

Définition. f est une application en escalier sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $(a_i)_{0 \le i \le n}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, f est constante sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$.

Définition. Si f est en escalier et $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$, σ est une subdivision adaptée à f si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, f est constante sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$.

Propriété. Les applications en escalier de $[a, b]$ sont bornées.

Propriété. Soit f une application en escalier et σ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Alors toute subdivision plus fine que σ est aussi adaptée à f.

5.2 Intégrale d'une application en escalier

Définition. Soit f une application en escalier et $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons λ_i la valeur constante de f sur $]a_{i-1}, a_i[$. On pose

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i}.$$

Cette quantité est indépendante du choix de σ parmi les subdivisions adaptées à f.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f$ représente une somme d'aires de rectangles, affectées d'un signe négatif lorsque $\lambda_i < 0$, donc $\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire algébrique de la surface située entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

Propriété. Supposons que f est en escalier et soit g une application de $[a, b]$ dans E qui ne diffère de f qu'en un nombre fini de points de $[a, b]$. Alors g en escalier et $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Théorème. Notons $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des applications en escalier de $[a, b]$ dans E. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a,b],E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ est linéaire.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E, F)$.
Si f est en escalier, $u \circ f$ est en escalier et $\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right)$.

Propriété. Si f est une application en escalier à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\int_a^b f \geq 0$.

Corollaire. Si $f, g \in \mathcal{E}([a, b], E)$, alors $[\forall t \in [a, b],\ \ f(t) \leq g(t)] \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Inégalité triangulaire : Pour tout $f \in \mathcal{E}([a, b], E)$, $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$.

Relation de Chasles : Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], E)$ et $c \in]a, b[$.
Alors $f_{/[a,c]}$ et $f_{/[c,b]}$ sont des applications en escalier et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

6 Les applications réglées

6.1 Définition

Définition. On dit que $f\ :\ [a, b] \longrightarrow E$ est réglée si et seulement si c'est la limite uniforme d'une suite d'applications en escalier, c'est-à-dire si et seulement si il existe une suite $(f_n) \in \mathcal{E}([a, b], E)^{\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} \|f_n(t) - f(t)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On note $\mathcal{R}([a, b], E)$ l'ensemble des applications réglées.

Propriété. $\mathcal{R}([a, b], E)$ est l'adhérence de $\mathcal{E}([a, b], E)$ dans $(\mathcal{B}([a, b], E), \|.\|_\infty)$.

6.2 Les applications continues par morceaux

Propriété. $C([a, b], E) \subset \mathcal{R}([a, b], E)$: toute application continue est réglée.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. $f : [a,b] \longrightarrow E$ est continue par morceaux si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f_{/]a_{i-1},a_i[}$ est prolongeable par continuité sur $[a_{i-1}, a_i]$, ce qui est équivalent à f est continue sur $[a,b] \setminus \{a_0,\dots,a_n\}$ et f admet en chaque a_i une limite à droite (sauf en b) et une limite à gauche (sauf en a). Dans ce cas, on dit que la subdivision σ est adaptée à f.

Définition. Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow E$ est continue par morceaux si et seulement si toutes ses restrictions aux segments inclus dans I sont continues par morceaux.

Propriété. Les applications continues par morceaux de $[a,b]$ dans E sont réglées.

Théorème. (Hors programme) Une application de $[a,b]$ dans E est réglée si et seulement si elle admet en tout point de $[a,b]$ une limite à droite (sauf en b) et une limite à gauche (sauf en a).

Corollaire. Les applications monotones de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ sont réglées.

Corollaire. Le produit de deux applications réglées est réglé.

7 Intégration des applications réglées

7.1 Construction

Définition. Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ une application réglée.

Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_\infty} f$. On pose $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)\,dt\Big)$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Seule la construction de l'intégrale sur $[a,b]$ d'une application continue par morceaux est au programme.

7.2 Propriétés

Théorème. $\mathcal{R}([a,b],E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}([a,b],E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ est linéaire.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de Banach et $u \in L(E,F)$ que l'on suppose continue.
Si $f \in \mathcal{R}([a,b],E)$, alors $u\circ f \in \mathcal{R}([a,b],F)$ et $\displaystyle\int_a^b u\circ f = u\left(\int_a^b f\right)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que E est de dimension finie et que $e = (e_1,\dots,e_p)$ est une base de E. Soit $f \in \mathcal{R}([a,b],E)$. Notons $f_1,\dots,f_p$ les applications coordonnées de f, de sorte que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^n f_j(t)e_j$. Alors $f_1,\dots,f_p$ sont réglées et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b f_j(t)\,dt\right) e_j$.

Remarque. Réciproquement, si $f_1,\dots,f_p$ sont réglées, alors f est aussi réglée.

Propriété. Supposons que $E = \displaystyle\prod_{i=1}^p E_i$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, E_i est un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{R}([a,b],E)$. Notons $f_1,\dots,f_p$ les applications composantes de f, de sorte que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = (f_1(t),\dots,f_p(t))$. Alors $f_1,\dots,f_p$ sont réglées et $\displaystyle\int_a^b f = \left(\int_a^b f_i\right)_{1\leq i\leq p}$.

Remarque. Réciproquement, si $f_1,\dots,f_p$ sont réglées, alors f est aussi réglée.

Inégalité triangulaire : Pour tout $f \in \mathcal{R}([a,b],E)$, $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$.

Propriété. Si f est une application réglée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\int_a^b f \geq 0$.

Corollaire. Si $f, g \in \mathcal{R}([a,b],E)$, alors $[\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq g(t)] \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$: l'intégrale est croissante.

Exemple. Si f est réglée, $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.

Propriété. Soit f une application réglée (resp : continue par morceaux) de $[a,b]$ dans E. Si g est une application de $[a,b]$ dans E qui ne diffère de f qu'en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors g est réglée (resp : continue par morceaux) et $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Relation de Chasles : soit $f \in \mathcal{R}([a,b],E)$ et $c \in]a,b[$.
Alors $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont réglées et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Convention : Si f est une application définie en $\alpha \in \mathbb{R}$, on convient $\int_\alpha^\alpha f = 0$.

Convention : Si $f\ :\ [a,b] \longrightarrow E$ est réglée, on convient que $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Propriété. La relation de Chasles se généralise au cas d'une application f réglée sur l'intervalle $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$, les réels (a,b,c) étant quelconques.

Remarque. Avec ces conventions, les égalités établies dans ce paragraphe restent valables, mais ce n'est pas le cas des inégalités.

8 Sommes de Riemann

Notation. On fixe une application f de $[a,b]$ dans E.

Définition. On appelle subdivision pointée de $[a,b]$ tout couple (σ,ξ), où $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$ et où $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifie $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$.

Notation. Notons $\mathcal{S}'$ l'ensemble des subdivisions pointées de $[a,b]$. Si $(\sigma,\xi) = ((a_i),(\xi_i)) \in \mathcal{S}'$, on notera $f_{\sigma,\xi}$ l'application en escalier définie par $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \forall x \in]a_{i-1}, a_i[\quad f(x) = f(\xi_i)$,

Définition. Soit $(\sigma,\xi) = ((a_i)_{0\leq i\leq n}, (\xi_i)_{1\leq i\leq n}) \in \mathcal{S}'$. On appelle somme de Riemann associée à f et à (σ,ξ) la quantité $S(f,\sigma,\xi) = \int_a^b f_{\sigma,\xi} = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i)$.

Théorème. Si f est une application réglée de $[a,b]$ dans E,
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall (\sigma,\xi) \in \mathcal{S}' \ \left(\delta(\sigma) \leq \alpha \Longrightarrow \|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\| \leq \varepsilon\right)$.

À savoir démontrer lorsque f est continue.

Corollaire. Soit $(\sigma_n, \xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}'^{\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions pointées dont le pas tend vers 0. Alors, si f est réglée, la suite des sommes de Riemann associée à f et à (σ_n, ξ_n) converge vers $\int_a^b f$. Plus précisément, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = (a_{i,n})_{0\leq i\leq \varphi(n)}$
et $\xi_n = (\xi_{i,n})_{1\leq i\leq\varphi(n)}$, si f est réglée et si $\max_{1\leq i\leq\varphi(n)} (a_{i,n} - a_{i-1,n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{\varphi(n)}(a_{i,n}-a_{i-1,n})f(\xi_{i,n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Cas particulier : si f est continue par morceaux, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(a+i\frac{b-a}{n}\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

9 Primitives

Notation. Conformément au programme officiel, on se limite au cas où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**. On sait alors qu'il est complet, donc c'est bien un espace de Banach.
On fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et une application $f\ :I\longrightarrow E$.

Définition. $g\ :I\longrightarrow E$ est une primitive de f si et seulement si g est dérivable sur I et $g'=f$.

Propriété. Si f admet une primitive g_0 sur I, alors g est une primitive de f si et seulement si il existe $k\in E$ tel que $\forall x\in I\ \ g(x)=g_0(x)+k$.

Propriété. On suppose que f est réglée sur I (c'est-à-dire que les restrictions de f aux intervalles compacts inclus dans I sont réglées). Soit $a\in I$. Alors $x\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est continue sur I.

Théorème fondamental de l'analyse : On suppose que f est continue sur I. Soit $a\in I$.
Alors $\boxed{\begin{array}{llll} F: & I & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array} \text{ est l'unique primitive de } f \text{ s'annulant en } a.}$
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq b$ et f une application continue de $[a,b]$ dans E. Si F est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a) \overset{\text{notation}}{=} [F(t)]_a^b$.

Corollaire. Si f est une application de classe C^1 sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a)$.

Théorème. Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est **continue**, positive et si $\int_a^b f=0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Si $f\ :\ [a,b]\longrightarrow E$ est réglée, la valeur moyenne de f est $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$.

Propriété. Si $f\ :\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application continue, f atteint sa valeur moyenne : il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$.