

Résumé de cours :

Semaine 1, du 2 au 5 septembre.

1 Fonctions et applications.

Notations : Nous emploierons dans les énoncés ci-dessous l'une des deux notations suivantes :

Notation a) : Soit D et E deux ensembles. Se donner une *application* f de D dans E , signifie que, pour tout $x \in D$, on se donne un unique $f(x) \in E$.

Notation b) : Se donner une *fonction* f d'un ensemble D dans un ensemble E signifie qu'à tout $x \in D$, on associe ou bien aucun élément de E , ou bien un unique élément de E qui est alors noté $f(x)$.

Remarque. Lorsque $D = E = \mathbb{R}$, on parle d'applications ou de fonctions *numériques*.

Définition. Sous la notation b), le domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des $x \in D$ pour lesquels la quantité $f(x)$ est *calculable*.

Définition. Soit f une application de D dans E (notation a)). Pour tout $A \subset D$, on pose $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$.

Notation. Soit f une application de D dans E (notation a)). Soit D' une partie de D et E' une partie de E .

- On note $f|_{D'}$ l'application de D' dans E qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|_{D'}$ est la restriction de f à D' .
- Lorsque $f(D) \subset E'$, on note $f|^{E'}$ l'application de D dans E' qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|^{E'}$ est la corestriction de f à E' .
- Lorsque $f(D') \subset E'$, on note $f|_{D'}^{E'}$ l'application de D' dans E' qui à x associe $f(x)$.

Définition.

On se place dans le plan usuel, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que f est une application ou une fonction numérique.

La représentation graphique de f , aussi appelée le graphe de f , est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x décrit $\mathcal{D}_f$ (notation b)), ou bien lorsque x décrit D (notation a)).

Définition. Sous la notation a) ou la notation b), lorsque $y = f(x)$, avec $x \in D$ et $y \in E$,

- on dit que y est **l'image** de x par f et
- que x est **un antécédent** de y par f .

Définition. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F (notation a)).

- On dit que f est surjective si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
Ainsi, f est surjective si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent.
- On dit que f est injective si et seulement si : $\forall x, y \in E, [f(x) = f(y) \implies x = y]$.
Ainsi, f est injective si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de E , leurs images sont différentes. f est injective ssi tout élément de F possède au plus un antécédent.

Définition de la composition :

- Sous la notation a) : soit $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$ deux applications. Pour tout $x \in D$, on pose $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ainsi, $g \circ f$ est une application de D dans F , appelée la composée de g et de f .
- Sous la notation b) : soit $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$ deux fonctions. Lorsque c'est possible, on pose $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: ainsi $g \circ f$ est une fonction de D dans F , appelée la composée de g et de f .

Propriété d'associativité de la composition : Sous la notation a),

soit $f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow F$ et $h : F \rightarrow G$ trois applications. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Il faut savoir le démontrer.

Application réciproque :

Soit f une application d'un ensemble D dans un ensemble E (notation a)).

- On dit que f est bijective si et seulement si f est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de E possède un unique antécédent. Ainsi f est bijective si et seulement si pour tout $y \in E$, il existe un unique $x_y \in D$ tel que $y = f(x_y)$.
- Dans ce cas, en notant $x_y = f^{-1}(y)$, on définit une application f^{-1} de E dans D , qui est également bijective. C'est la bijection réciproque de la bijection f .
- Lorsque f est bijective, on a $(f^{-1})^{-1} = f$. De plus $f \circ f^{-1} = Id_E$ et $f^{-1} \circ f = Id_D$, où Id_E est l'application de E dans E qui à x associe x .
- f est bijective si et seulement si il existe une application g de E dans D telle que $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_D$. Dans ce cas, $f^{-1} = g$.

2 Les fonctions numériques

Notation. Dans ce chapitre, sauf précision du contraire, f est une application ou une fonction de D dans $\mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$.

2.1 Les fonctions polynomiales

Définition. Un polynôme P (à coefficients réels) est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (notation a)) de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré de ce polynôme. On note $n = \deg(P)$.

Par convention, l'application identiquement nulle est un polynôme de degré égal à $-\infty$.

Définition. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Il faut savoir le démontrer.