

Résumé de cours :

Semaine 2, du lundi 7 au vendredi 11 septembre.

1 Les fonctions numériques (suite)

Notation. Dans ce chapitre, sauf précision du contraire, f est une application ou une fonction de D dans $\mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$.

1.1 Les fonctions polynomiales (suite)

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ k réels deux à deux distincts. Alors $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)Q(x).$$

Propriété. Soit P et Q deux polynômes. Alors l'application $x \mapsto P(x)Q(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi un polynôme, que l'on note PQ . De plus, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Théorème. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P est inférieur ou égal à n .

1.2 Premières caractéristiques d'une fonction

Définition. (Notation b))

- f est paire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f, [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(x) = f(-x)]$.
- f est impaire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f, [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(-x) = -f(x)]$.
- Soit $T > 0$. f est T -périodique si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, [x + T \in \mathcal{D}_f] \wedge f(x + T) = f(x)$.

Propriété.

- Une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés.
- Une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
- Une fonction est T -périodique si et seulement si son graphe contient son image par la translation de vecteur $T\vec{e}_1$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. (notation a))

- f est croissante si et seulement si $\forall x, y \in D, [x \leq y \implies f(x) \leq f(y)]$.
- f est strictement croissante si et seulement si
 $\forall x, y \in D, [x < y \implies f(x) < f(y)]$.
- f est décroissante si et seulement si $\forall x, y \in D, [x \leq y \implies f(x) \geq f(y)]$.
- f est strictement décroissante si et seulement si
 $\forall x, y \in D, [x < y \implies f(x) > f(y)]$.
- f est monotone si et seulement si f est croissante ou décroissante.
- f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Propriété. Graphiquement, les antécédents de λ par f sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Propriété. Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq \lambda$, en l'inconnue x , sont les abscisses des points du graphe de f situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Définition. Une application $f : D \longrightarrow E$ est majorée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$, c'est-à-dire si et seulement si le graphe de f est situé sous la droite horizontale d'équation $y = M$.

1.3 Opérations sur les fonctions

Définition. (notation b)) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $f + g$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
On a $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- λf est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
On a $\mathcal{D}_{\lambda f} = \mathcal{D}_f$.
- fg est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
On a $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- $|f|$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $|f|(x) = |f(x)|$. On a $\mathcal{D}_{|f|} = \mathcal{D}_f$.
- On définit de même $f - g$, $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$.

Définition. f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Propriété. Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f pour la symétrie orthogonale selon la première diagonale, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f et g deux applications définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est inférieure à g sur D , et on note $f \leq g$, lorsque : $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$.

Remarque. La notation " $f < g$ " désignera parfois la condition $[\forall x \in D, f(x) < g(x)]$, et d'autres fois la condition $[(f \leq g) \text{ et } (f \neq g)]$, c'est-à-dire $[\forall x \in D, f(x) \leq g(x)]$ et $[\exists x \in D, f(x) < g(x)]$.

2 Trigonométrie

2.1 Les fonctions circulaires

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{[e^z]} = e^{\overline{z}}$. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l'angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d'affixe z).

On pose $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$.

Ainsi $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point $M_{e^{i\theta}}$ et $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

Formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Propriété. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques. $\cos$ est paire. $\sin$ est impaire.

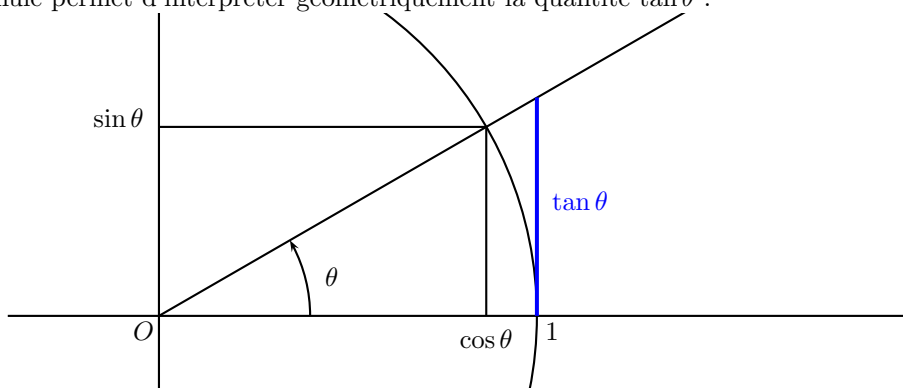
Définition des fonctions tangente et cotangente : $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ et $\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

Formules : Soit OAB un triangle rectangle en A . Par définition, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Notons $\theta = \widehat{AOB}$ l'angle au sommet O .

Alors $\cos \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$, $\sin \theta = \frac{AB}{OB} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
 et $\tan \theta = \frac{AB}{OA} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$.

Cette dernière formule permet d'interpréter géométriquement la quantité $\tan \theta$:



2.2 Graphes des fonctions circulaires

Il faut savoir tracer les graphes des fonctions cos, sin et tan.

2.3 Formulaire de trigonométrie

Il faut savoir établir chacune de ces formules.

Formule circulaire : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Formules de symétries : Lorsque les quantités qui interviennent sont définies,

$$\begin{array}{lll} \cos(-\theta) = \cos(\theta) & \sin(-\theta) = -\sin(\theta) & \tan(-\theta) = -\tan(\theta) \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) & \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) & \tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta) \\ \cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) & \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta) & \tan(\pi + \theta) = \tan(\theta) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta) & \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta) & \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cotan(\theta) \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta) & \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta) & \tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cotan(\theta) \end{array}$$

Il faut être capable de visualiser toutes ces formules sur le cercle trigonométrique.

Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

2.4 Formulaire de trigonométrie (suite)

Il faut savoir établir chacune de ces formules.

Formule d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Formules de duplication : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$,

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Premières formules de linéarisation :

$$\cos^2 a = \frac{\cos(2a) + 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \geq 0.$$

$$2 \cos a \cdot \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

$$2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b),$$

$$2 \sin a \cdot \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b).$$

Formules de factorisation :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

Il faut savoir les retrouver en utilisant les complexes.

Formules (hors programme) : en posant $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \tan \theta = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Propriété. Lignes trigonométriques à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

La croissance de la fonction tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ aide à retenir la dernière ligne.

2.5 Equations trigonométriques

2.5.1 Résolution du système (S) : $(\cos x = c) \wedge (\sin x = s)$

2.5.2 Résolution de l'équation $\cos x = c$

Définition. L'application $\cos$ réalise une bijection (décroissante) de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. On note $\arccos$ l'application réciproque.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\cos u = \cos v \iff u \equiv \pm v [2\pi]$.

Il faut savoir résoudre les équations suivantes : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

2.5.3 Résolution de l'équation $\sin x = s$

Définition. L'application $\sin$ réalise une bijection (croissante) de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. On note $\arcsin$ l'application réciproque.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\sin u = \sin v \iff (u \equiv v [2\pi]) \vee (u \equiv \pi - v [2\pi])$.

2.5.4 Résolution de l'équation $\tan x = t$

Définition. $\tan$ est une bijection (croissante) de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note $\arctan$ l'application réciproque.

Corollaire. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\tan u = \tan v \iff u \equiv v [\pi]$.

2.5.5 Expressions de la forme $A \cos x + B \sin x$.

Technique à connaître : transformation de $A \cos x + B \sin x$ en $r \cos(x - \varphi)$.

Première méthode :

Soit $(A, B) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right).$$

Posons $c = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $s = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. On a $c^2 + s^2 = 1$, donc on sait qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$c = \cos \varphi \text{ et } s = \sin \varphi. \text{ Ainsi, en posant } r = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$A \cos x + B \sin x = r(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = r \cos(x - \varphi).$$

r est appelé l'amplitude et φ la phase.

On remarquera que, par construction, $c + is = e^{i\varphi}$, donc $A + iB = re^{i\varphi}$.

Seconde méthode : lorsque $A \neq 0$. Il existe φ tel que $\tan \varphi = \frac{B}{A}$.

$$\text{Alors } A \cos x + B \sin x = A \left(\cos x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x \right) = \frac{A}{\cos \varphi} \cos(x - \varphi).$$

Sachez résoudre les équations suivantes :

$$-3 \cos x + 4 \sin x = 10 \text{ et } \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2.$$

3 Dérivation et intégration

3.1 Pente de la tangente

Propriété. Pour une droite d'équation $y = px + y_0$, on dit que p est sa pente.

On dispose également des droites "verticales", d'équation $x = x_0$, où $x_0 \in \mathbb{R}$, qui sont de pente infinie. Deux droites affines du plan sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

Propriété. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $x_0, x_1 \in \mathcal{D}_f$, avec $x_0 \neq x_1$, la corde du graphe de f entre les abscisses x_0 et x_1 est par définition l'unique droite du plan passant par les points du graphe de f d'abscisses x_0 et x_1 .

$$\text{Elle a pour équation : } y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \times (x - x_0).$$

$$\text{En particulier, la pente de cette droite est égale à } \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ possède une limite lorsque x_1 tend vers x_0 . Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée de f en x_0 .

Informellement, lorsque f est dérivable en x_0 , la corde du graphe de f entre les abscisses x_0 et x_1 tend vers la tangente en x_0 , d'équation : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Cela dit que la meilleure approximation de f , au voisinage de x_0 , parmi l'ensemble des applications affines, est $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Il faut retenir que $f'(x_0)$, lorsqu'elle est définie, est la pente de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse x_0 .

Définition. On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en chacun des réels de I . On dispose alors de l'application f' , définie au moins sur I .

On dit alors que f est de classe D^1 .

Lorsque f' est continue sur I , on dit que f est de classe C^1 sur I .

Définition. Si f' est définie sur un intervalle I , on dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque f' est dérivable en tout point de I . La dérivée de la dérivée de f est notée f'' . On l'appelle la dérivée seconde de f .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, la dérivée n -ième de f lorsqu'elle est définie est la dérivée de la dérivée $(n-1)$ -ième. On la note $f^{(n)}$. On dit alors que f est de classe D^n sur I .

On dit que f est de classe C^n sur I lorsque f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.

On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est C^n sur I .

Remarque. On convient que $f^{(0)} = f$, pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.2 Règles de dérivation

A savoir utiliser dans des calculs sans hésiter.

- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
- $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$.
- Lorsque f est bijective, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies.