

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 1 : du lundi 21 au vendredi 25 septembre.

Liste des questions de cours

- 1°) Soit P un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
- 2°) Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, comment déduit-on le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f ? Démontrez-le.
- 3°) Montrer à l'aide des complexes que $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$.
- 4°) Résoudre l'équation $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$.
- 5°) Résoudre l'équation $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2$.
- 6°) Tracer les graphes des fonctions $\sin$ et $\tan$.
- 7°) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.
- 8°) Pour tout $x \in [-1, 1]$, montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
- 9°) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, montrer que $\arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t}) = \operatorname{sgn}(t) \frac{\pi}{2}$.

Les thèmes de la semaine : révisions de Terminale et dérivation

1 Révisions de Terminale

Nous avons vu en TD quelques exercices de Terminale, portant sur les réels, les complexes et sur le principe de récurrence. Ces notions peuvent faire l'objet d'exercices en colle.

2 Quelques généralités sur les applications

Ce paragraphe donne quelques définitions et propriétés concernant des applications ou des fonctions d'un ensemble quelconque vers un ensemble quelconque. La notion d'image réciproque d'un ensemble par une application n'est pas au programme pour cette semaine de colles.

Domaine de définition d'une fonction.

Image directe d'une partie par une application.

Restriction et corestriction d'une application.

Image et antécédents d'un élément.

Application injective, surjective, bijective.

Composition, associativité de la composition.

Bijection réciproque d'une bijection.

Une application f est bijective si et seulement si il existe g telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ valent l'identité.

3 Les fonctions numériques

Graphe d'une fonction numérique.

Construction du graphe de l'application réciproque par symétrie par rapport à la première diagonale.

Parité, imparité, périodicité.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Fonctions monotones, fonctions strictement monotones.

Combinaison linéaires de fonctions, produit et quotient de fonctions.

4 Applications polynomiales

Les définitions et propriétés de ce paragraphe sont admises pour le moment. Aucune maîtrise théorique des polynômes n'est attendue à ce stade de l'année.

Définition des polynômes à coefficients réels (vus comme des applications polynomiales pour le moment), degré, racine.

Degré d'une somme, d'un produit.

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des racines distinctes de P , il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)Q(x)$.

Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.

5 Dérivation

Il s'agit d'une première approche de la dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet les théorèmes nécessaires et aucune maîtrise théorique n'est attendue des élèves à ce sujet.

5.1 Définition

Équation de la corde joignant les points du graphe de f d'abscisses x_0 et x_1 .

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, dérivée de f en $x_0 \in I$. Equation de la tangente.

Remarque. Les aspects théoriques concernant les notions de limite et de dérivée seront abordés ultérieurement. L'objectif de ce chapitre est essentiellement de mettre en place des techniques de calculs.

Applications dérivables sur I , de classe D^1 ou C^1 sur I .

Applications n fois dérivables, de classe D^n ou C^n , de classe C^∞ .

5.2 Formulaire de dérivation

Dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Dérivée d'une bijection réciproque.

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(f(ax+b)) &= a^n f^{(n)}(ax+b), \\ \cos^{(n)}(x) &= \cos(x+n\frac{\pi}{2}), \quad \sin^{(n)}(x) = \sin(x+n\frac{\pi}{2}), \\ \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x}\right) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.\end{aligned}$$

5.3 Dérivation et monotonie

Théorème admis pour le moment : Soit f dérivable sur un intervalle I . f est constante (resp : croissante, décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$ (resp : $f'(x) \geq 0, f'(x) \leq 0$).
Si $f'(x)$ est de signe constant sur I et si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est fini, alors f est strictement monotone.

5.4 Quelques théorèmes d'analyse

On admet pour le moment le théorème de la limite monotone, le fait qu'une application continue sur un segment atteint ses bornes, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Définition puis caractérisation d'un C^n difféomorphisme entre deux intervalles de $\mathbb{R}$.

6 Trigonométrie

6.1 Les fonctions circulaires

Remarque. Concernant l'usage des complexes, on s'appuie pour le moment sur les connaissances de Terminale des élèves. Les complexes seront développés en cours ultérieurement.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l'angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d'affixe z).

On pose $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$, c'est-à-dire :

$$\textbf{Formules d'Euler : } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Définition des fonctions tangente et cotangente.

Dans un triangle rectangle, formules donnant les cosinus, sinus et tangente d'un angle en fonction des longueurs des côtés.

Graphes des fonctions cos, sin et tan.

6.2 Formulaire de trigonométrie

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Formules de symétries : Passage de θ à $-\theta, \pi - \theta, \pi + \theta, \frac{\pi}{2} - \theta$ et $\frac{\pi}{2} + \theta$.
Visualisation de ces formules sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition :

$$\cos(a+b), \cos(a-b), \sin(a+b), \sin(a-b), \tan(a+b), \tan(a-b).$$

Formules de duplication : $\cos(2a), \sin(2a)$ et $\tan(2a)$.

Premières formules de linéarisation :

$$\cos^2 a, \sin^2 a, 2 \cos a \cdot \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b), 2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b), \\ 2 \sin a \cdot \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b).$$

$$\textbf{Formules de factorisation : } \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

et formules analogues pour $\cos p - \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$.

Ces formules sont hors programme, mais l'étudiant doit savoir les retrouver.

$$\textbf{Formules : } \text{en posant } u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \text{ on a } \cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \tan \theta = \frac{2u}{1-u^2}.$$

6.3 Equations trigonométriques

$$\cos u = \cos v \iff u \equiv \pm v \text{ modulo } 2\pi.$$

$$\sin u = \sin v \iff (u \equiv v \text{ modulo } 2\pi) \vee (u \equiv \pi - v \text{ modulo } 2\pi).$$

$$\tan u = \tan v \iff u \equiv v \text{ modulo } \pi.$$

Écriture de $A \cos x + B \sin x$ sous la forme $r \cos(x - \varphi)$.

6.4 Fonctions trigonométriques réciproques

Définitions de arccos, arcsin et arctan. Propriétés, dérivées, graphes.

Prévision pour la semaine prochaine :

Intégration, fonctions puissances, trigonométrie hyperbolique.