

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 2 : du lundi 28 septembre au vendredi 2 octobre.

Liste des questions de cours

- 1°) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des intégrales d'applications continues définies sur un intervalle $[a, b]$.
- 2°) Si f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et si $u : J \rightarrow I$ et $v : J \rightarrow I$ sont des applications dérivables sur un intervalle J , déterminer la dérivée de $t \mapsto \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$.
- 3°) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- 4°) Montrer que $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
- 5°) Tracer le graphe de $x \mapsto x^\alpha$, en distinguant les cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha < 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- 6°) Tracer les graphes des fonctions $\tan$ et $\arctan$.
- 7°) Graphes des fonctions sh , ch et th .
- 8°) Comment le graphe de $x \mapsto f(ax)$ se déduit-il du graphe de f ? Le démontrer.
- 9°) Donner (en justifiant) une expression logarithmique de $\operatorname{argch}(x)$.
- 10°) Énoncer et démontrer le théorème de changement de variable dans une intégrale.

Les thèmes de la semaine : Dérivation et intégration

Il s'agit d'une première approche de la dérivation et de l'intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet les théorèmes nécessaires et aucune maîtrise théorique n'est attendue des élèves à ce sujet. On définit et on étudie les fonctions usuelles.

1 Programme des colles de la semaine 1

On reprend le contenu du programme de la semaine 1. Il pourra faire l'objet d'exercices.

2 Etude d'une fonction

Plan d'étude, recherche d'asymptotes obliques, de branches paraboliques.

3 Déformations du graphe

- Le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- Le graphe de $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse $\frac{a}{2}$.
- Le graphe de $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par l'affinité orthogonale d'axe invariant Oy et de coefficient $\frac{1}{a}$.
- Le graphe de $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par l'affinité d'axe invariant Ox et de coefficient a .

4 Intégration

Définition informelle de $\int_a^b f(t)dt$ lorsque f est continue, en tant qu'aire algébrique.

Propriétés de l'intégrale (admisses) : linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive avec $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

5 Primitivation

Primitive d'une application continue, unicité à une constante additive près.

Théorème fondamental de l'analyse (admis) : Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0 .

Application au calcul d'intégral. Notation $\int f(t)dt$ pour désigner une primitive à une constante près.

6 Calcul d'intégrales

Théorème de changement de variable dans une intégrale.

Intégrale d'une application paire (resp : impaire) sur un intervalle centré en 0.

Si f est continue et T -périodique, $\int_t^{T+t} f(t) dt$ ne dépend pas de t .

Intégration par parties.

7 Fonctions Logarithmes et puissances

7.1 Les fonctions $\ln$ et $\exp$

Définition : Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Propriétés de la fonction logarithme.

On note $\exp$ le C^∞ -difféomorphisme réciproque, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Propriétés de $x \mapsto e^x$.

Graphe de $\ln$ et $\exp$.

7.2 Fonctions puissances

Graphes de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, graphe de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

8 D'autres fonctions usuelles

Les fonctions ch , sh et th . Propriétés et graphes.

Formules : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{ch}(a + b)$, $\operatorname{sh}(a + b)$.

Définitions (hors programme) de argch , argsh et argth . Propriétés, dérivées, graphes. Expressions logarithmiques.

Prévision pour la semaine prochaine :

Théorie des ensembles et logique.