

DS 1 : approximation d'une intégrale de Gauss

Les calculatrices sont interdites.

Partie I : Préliminaires

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soient m et M deux nombres réels tels que $m \leq M$.

Soit g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I telle que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I , on a $m \leq g'(x) \leq M$.

1°) Lorsque g est de classe C^1 , montrer que pour tous nombres réels a et b appartenant à l'intervalle I et tels que $a \leq b$, on a la double inégalité suivante :

$$m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a).$$

On suppose maintenant que g est seulement dérivable sur I .

On fixe un nombre réel a dans l'intervalle I et on introduit les fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle I par :

$$\varphi(x) = g(x) - g(a) - m(x-a) \quad \text{et} \quad \psi(x) = g(x) - g(a) - M(x-a).$$

2°) Étudier le sens de variation des fonctions φ et ψ sur l'intervalle I .

En déduire que le résultat de la question 1 est encore valable lorsque g est seulement dérivable sur I .

3°) On suppose que J est un second intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. On suppose que h est une application continue de I dans $\mathbb{R}$, et que θ est une application de classe C^1 de J dans I . Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in J$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(\theta(t))\theta'(t) dt = \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} h(x) dx.$$

Lorsque l'on remplacera un membre de cette égalité par l'autre, on dira que l'on effectue le changement de variable $x = \theta(t)$.

4°) Soit h une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$ et $c \in \mathbb{R}$.

Que devient $\int_a^b h(x) dx$ lorsque l'on effectue le changement de variable $x = -t$? Même question avec le changement de variable $x = t + c$.

Partie II : Étude d'une fonction gaussienne

Pour toute la suite de ce problème, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

5°) Étudier la parité de la fonction f et son sens de variation (au sens strict) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en indiquant les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

6°) Les dérivées successives de f

6.a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$.

6.b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et préciser son coefficient dominant. Expliciter P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

6.c) En déduire le sens de variation (au sens strict) de la fonction f' sur $\mathbb{R}_+$.

7°) Quelques encadrements

7.a) Pour tout $x \in [0, 1]$, montrer que $-1 \leq f''(x) \leq 0$ et $-2 \leq f^{(4)}(x) \leq 3$.

7.b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lorsque $0 \leq a < b \leq 1$, montrer que $f'(b)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b-a)$.

Lorsque $1 \leq a < b$, montrer que $f'(a)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b-a)$.

Dans toute la suite du problème, on munit le plan euclidien d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et on note Γ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

8°) Étude des tangentes à la courbe Γ

Soit a un nombre réel. On note T_a la tangente à la courbe Γ au point de coordonnées $(a, f(a))$, et u_a la fonction affine dont T_a est la courbe représentative.

8.a) Expliciter $u_a(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

8.b) Montrer que, pour tout $a, x \in \mathbb{R}$, $f(x) - u_a(x) = \int_a^x (x-t)f''(t) dt$.

8.c) Lorsque $a \in \mathbb{R}_+$, en déduire comment Γ est positionnée (au sens large, c'est-à-dire en utilisant les inégalités $\leq$ et $\geq$) par rapport à la droite T_a , à proximité du point de coordonnées $(a, f(a))$.

9°) Tracer l'allure de Γ et illustrer graphiquement les résultats de la question 8.

Partie III : Méthode des rectangles

Dans toute la suite du problème, on pose : $A = \int_0^1 f(t) dt$, c'est-à-dire : $A = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
Les deux parties **III** et **IV** proposent de déterminer des valeurs approchées de A .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

10°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, montrer que

$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$. Interpréter graphiquement cet encadrement.

11°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}}$.

Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

12°) En utilisant les inégalités établies à la question **11**, et en admettant que $e \leq \frac{25}{9}$, déterminer une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée par défaut de A à 10^{-2} près. (On ne demande pas de calculer ici cette valeur approchée.)

Partie IV : Méthodes des trapèzes et du point milieu

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} f(1)$ et $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$.

Dans les questions **13** à **15**, a et b désignent deux nombres réels de l'intervalle $[0, 1]$ tels que $a < b$, et l'on pose $c = \frac{a+b}{2}$.

13°) On note τ l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est la droite passant par les points de Γ de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, que l'on appelle la corde de Γ joignant les points d'abscisses a et b .

Calculer $\tau(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que $\int_a^b \tau(t) dt = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Montrer que $\int_a^b u_c(t) dt = (b-a)f(c)$, où u_c est la fonction affine introduite à la question **8**.

En déduire une interprétation géométrique de v_n et de w_n .

14°) Montrer que $\int_a^b f(t) dt = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) f''(t) dt$.

Montrer que $\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c) + \frac{1}{2} \left(\int_a^c (t-a)^2 f''(t) dt + \int_c^b (t-b)^2 f''(t) dt \right)$.

15°) En déduire les deux encadrements suivants :

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$\text{et } 0 \leq (b-a)f(c) - \int_a^b f(t) dt \leq \frac{(b-a)^3}{24}.$$

16°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $0 \leq A - v_n \leq \frac{1}{12n^2}$ et $0 \leq w_n - A \leq \frac{1}{24n^2}$.
Qu'en déduit-on pour les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

17°) On admettra qu'une calculatrice donne : $0,84998 \leq v_3 \leq 0,84999$
et $0,85845 \leq w_3 \leq 0,85846$.

En déduire une valeur décimale approchée de A à 10^{-2} près.

18°) Montrer que la suite $(n(A - u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

19°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On note à nouveau $c = \frac{a+b}{2}$.

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer que $\int_a^b P(t) dt = \frac{b-a}{6}(P(a) + 4P(c) + P(b))$ (il s'agit de la formule des trois niveaux). On cherchera à présenter les calculs de manière élégante.

20°) En déduire l'expression d'une suite, construite à partir des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui devrait converger plus rapidement vers A que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On ne demande pas une démonstration de cette affirmation mais seulement un argument en sa faveur qui revient à prendre du recul par rapport aux parties III et IV.