

DS 1 : un corrigé

Ce problème est librement inspiré du Problème 1 de l'épreuve de CAPES interne 2010. Plusieurs questions ont été ajoutées, supprimées ou remaniées.

Partie I : Préliminaires

1°) Soit $a, b \in I$ avec $a \leq b$; comme I est un intervalle, $[a, b] \subset I$.
 g est de classe C^1 sur I , donc g' est continue sur $[a, b]$ et g est une primitive de g' sur $[a, b]$: d'après le théorème fondamental de l'analyse, $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt$.

Or, pour tout $t \in [a, b]$, $m \leq g'(t) \leq M$, et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b g'(t) dt \leq \int_a^b M dt, \text{ c'est-à-dire } \boxed{m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a)}.$$

2°) $\diamond$ φ et ψ sont dérivables sur I comme sommes de fonctions dérivables sur I et, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = g'(x) - m \geq 0$ et $\psi'(x) = g'(x) - M \leq 0$, donc $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } I \text{ et } \psi \text{ est décroissante sur } I}$.

Pour la suite de cette question, soit $b \in I$ tel que $a \leq b$.

$\diamond$ φ est croissante sur I et $a \leq b$, donc $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, or $\varphi(a) = 0$,

donc $0 \leq g(b) - g(a) - m(b-a)$, c'est-à-dire $m(b-a) \leq g(b) - g(a)$.

$\diamond$ ψ est décroissante sur I , donc $\psi(b) \leq \psi(a) = 0$, c'est-à-dire $g(b) - g(a) \leq M(b-a)$.

Ainsi, $\boxed{m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a)}$: le résultat de la question 1 vaut sans hypothèse de continuité sur g' .

3°) h est continue sur l'intervalle I , donc h admet au moins une primitive H sur I .

θ est de classe C^1 de J dans I et H est dérivable sur I , donc $H \circ \theta$ est dérivable sur J et $(H \circ \theta)' = \theta' \times (H' \circ \theta) = \theta' \times (h \circ \theta)$. $H \circ \theta$ est donc une primitive sur J de l'application continue $t \mapsto h(\theta(t))\theta'(t)$. Par conséquent, pour tous $\alpha, \beta \in J$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(\theta(t))\theta'(t) dt = (H \circ \theta)(\beta) - (H \circ \theta)(\alpha) = H(\theta(\beta)) - H(\theta(\alpha)) = \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} h(x) dx,$$

la dernière égalité venant de ce que H est une primitive de h sur I et que $\theta(\alpha), \theta(\beta) \in I$.

4°) $\diamond$ Notons $J = \{-t \mid t \in I\}$: J est bien un intervalle non vide et non réduit à un point. Notons θ l'application de J dans I telle que, pour tout $t \in J$, $\theta(t) = -t$.

θ étant de classe C^1 , on peut appliquer la question précédente. Or $\theta' = -1$, donc

$$\int_{-a}^{-b} h(-t) \times (-1) dt = \int_a^b h(x) dx, \text{ c'est-à-dire } \boxed{\int_a^b h(x) dx = \int_{-b}^{-a} h(-t) dt}.$$

◇ De même, on note maintenant $J = \{t \in \mathbb{R} / t + c \in I\}$: J est bien un intervalle non vide et non réduit à un point. Notons θ l'application de J dans I telle que, pour tout $t \in J$, $\theta(t) = t + c$. θ étant de classe C^1 , on peut appliquer la question précédente.

Or $\theta' = 1$, donc $\boxed{\int_a^b h(x) dx = \int_{a-c}^{b-c} h(t+c) dt}.$

Partie II : Étude d'une fonction gaussienne

5°) ◇ f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$, donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

◇ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction polynomiale $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ et de l'exponentielle, toutes deux dérivables, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ car $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ et $\{x \in \mathbb{R}_+ / f'(x) = 0\} = \{0\}$ est fini, donc d'après le cours, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[}$.

◇ $-\frac{x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ et $e^X \xrightarrow{X \rightarrow -\infty} 0$, donc par composition, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$; par parité, on a aussi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Par parité toujours, f est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$, et $f(0) = 1$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow 1 \searrow$	0

6°) Les dérivées successives de f

6.a) ◇ *Existence.* Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion : “ f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)} = P_n f$ ”.

$R(0)$ est vraie avec $P_0 = 1$ (fonction polynomiale constante).

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ soit vraie. Alors $f^{(n)} = P_n f$ est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: f est $n+1$ fois dérivable, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = P'_n(x)f(x) + P_n(x)f'(x) = P'_n(x)f(x) - xP_n(x)f(x)$, donc $f^{(n+1)} = P_{n+1}f$, en posant $\boxed{P_{n+1} = P'_n - XP_n}$. Ceci prouve $R(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: f est n fois dérivable pour tout n , donc $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

◇ *Unicité.* Si (Q_n) est une autre suite convenable, alors pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x)f(x) = Q_n(x)f(x)$, or $f(x) \neq 0$, donc $P_n(x) = Q_n(x)$: les fonctions polynomiales P_n et Q_n coïncident sur $\mathbb{R}$, donc sont égales. Ceci prouve l'unicité.

6.b) ◇ Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

C'est vrai pour $n = 0$: $P_0 = 1$ est de degré 0 et de coefficient dominant $1 = (-1)^0$.
 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = (-1)^n X^n + R$ avec $\deg R < n$. Alors P'_n est de degré au plus $n - 1$, tandis que $-XP_n = (-1)^{n+1} X^{n+1} - XR$ est de degré $n + 1$, de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$. La somme $P_{n+1} = P'_n - XP_n$ est donc de degré $n + 1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$. Ainsi, $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n$.

◇ La relation $P_{n+1} = P'_n - XP_n$ donne successivement :

$$\boxed{P_1 = -X}, \quad \boxed{P_2 = X^2 - 1}, \quad \boxed{P_3 = -X^3 + 3X}, \quad \boxed{P_4 = X^4 - 6X^2 + 3}.$$

6.c) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les questions 6.a et 6.b, $f''(x) = P_2(x)f(x) = (x^2 - 1)f(x)$.
 Or $f(x) > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 1$: $f''(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$. De plus, $\{x \in \mathbb{R}_+ / f''(x) = 0\} = \{1\}$ est fini, donc d'après le cours,

$$\boxed{f' \text{ est strictement décroissante sur } [0, 1] \text{ et strictement croissante sur } [1, +\infty[}}.$$

7°) Quelques encadrements

7.a) Soit $x \in [0, 1]$. $-\frac{x^2}{2} \leq 0$ et l'exponentielle est croissante, donc $0 < f(x) \leq e^0 = 1$.

◇ On a $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$. Par produit de ces encadrements de réels positifs, $0 \leq (1 - x^2)f(x) \leq 1$, or $f''(x) = -(1 - x^2)f(x)$, donc $\boxed{-1 \leq f''(x) \leq 0}$.

◇ D'après 6.b, $f^{(4)}(x) = q(x)f(x)$ où $q(x) = x^4 - 6x^2 + 3$.

q est dérivable sur $[0, 1]$ et $q'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) \leq 0$ pour $x \in [0, 1]$, donc q est décroissante sur $[0, 1]$: $-2 = q(1) \leq q(x) \leq q(0) = 3$.

◇ Si $q(x) \geq 0$: comme $0 < f(x) \leq 1$, on a $0 \leq q(x)f(x) \leq q(x) \leq 3$.

◇ Si $q(x) < 0$: comme $0 < f(x) \leq 1$, on a $-2 \leq q(x) \leq q(x)f(x) < 0$.

Dans les deux cas, $\boxed{-2 \leq f^{(4)}(x) \leq 3}$.

7.b) ◇ On suppose que $0 \leq a < b \leq 1$. On a vu que f' est décroissante sur $[0, 1]$, donc pour tout $x \in [a, b]$, $f'(b) \leq f'(x) \leq f'(a)$. D'après la question 2, on en déduit que $f'(b)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b - a)$.

◇ De même, f' étant croissante sur $[1, +\infty[$, lorsque $1 \leq a < b$, pour tout $x \in [a, b]$, $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)$, donc la question 2 montre que $f'(a)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b - a)$.

8°) Étude des tangentes à la courbe Γ

8.a) T_a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a), \text{ or } f'(a) = -af(a), \text{ donc } \boxed{u_a(x) = e^{-\frac{a^2}{2}}(1 - a(x - a))}.$$

8.b) Soit $a, x \in \mathbb{R}$. f étant de classe C^∞ , les applications $t \mapsto x - t$ et f' sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut donc intégrer par parties :

$$\int_a^x (x - t)f''(t) dt = \left[(x - t)f'(t) \right]_a^x + \int_a^x f'(t) dt = -(x - a)f'(a) + f(x) - f(a),$$

$$\text{c'est-à-dire } \boxed{f(x) - u_a(x) = \int_a^x (x - t)f''(t) dt}.$$

8.c) ◇ Supposons $a \in [0, 1]$ et soit $x \in [0, 1]$. D'après la question 7.a, $f'' \leq 0$ sur $[0, 1]$.
 Si $x \geq a$: pour tout $t \in [a, x]$, $x - t \geq 0$ et $f''(t) \leq 0$, donc $(x - t)f''(t) \leq 0$ et, par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $\int_a^x (x - t)f''(t) dt \leq 0$.

Si $x < a$: pour tout $t \in [x, a]$, $x - t \leq 0$ et $f''(t) \leq 0$, donc $(x - t)f''(t) \geq 0$ et $\int_x^a (x - t)f''(t) dt \geq 0$, d'où $\int_a^x (x - t)f''(t) dt \leq 0$.

Dans les deux cas, d'après 8.b, $\boxed{f(x) \leq u_a(x)}$.

Ainsi, lorsque $a \in [0, 1]$, en limitant le domaine des abscisses à $[0, 1]$, Γ est située en dessous de T_a .

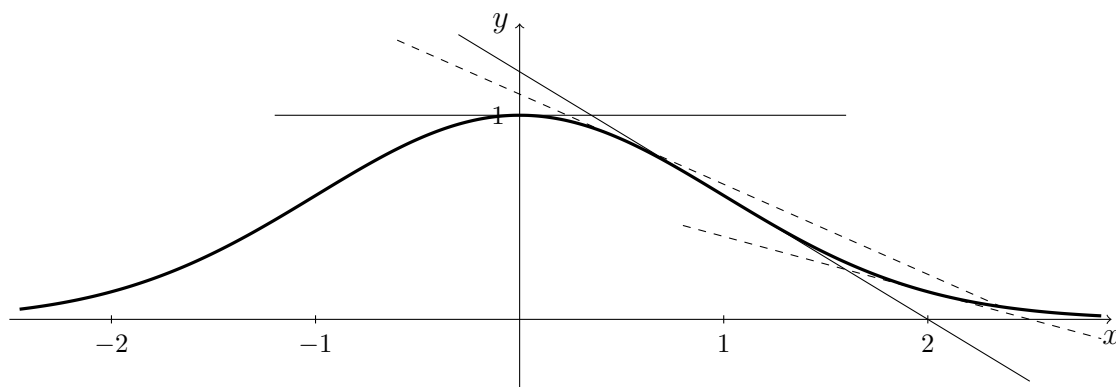
C'est en fait un résultat connu de Terminale : f'' est négative sur $[0, 1]$, donc f est concave sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe est au-dessous de chacune de ses tangentes.

◇ Supposons $a \in [1, +\infty[$ et soit $x \in [1, +\infty[$. D'après 6.c, $f'' \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, et le même raisonnement, avec les inégalités inversées, donne $\int_a^x (x - t)f''(t) dt \geq 0$, donc

$\boxed{f(x) \geq u_a(x)}$: sur $[1, +\infty[$, Γ est située au-dessus de T_a , ce qui signifie que f est convexe sur cet intervalle.

◇ Étudions plus précisément le cas où $a = 1$: les deux points précédents montrent que Γ est au-dessous de T_1 lorsqu'on limite le domaine des abscisses à $[0, 1]$ et au-dessus sur $[1, +\infty[$. Ainsi, au voisinage de 1, la tangente T_1 traverse la courbe Γ . C'est attendu car on a vu qu'il y a changement de convexité en 1, donc le point $(1, f(1))$ est un point d'inflexion de Γ .

9°)



On a tracé les tangentes T_0 et T_1 en traits pleins, d'équation respective : $T_0 : y = 1$ et $T_1 : y = e^{-\frac{1}{2}}(2 - x)$. Deux autres tangentes sont tracées en pointillé pour illustrer les résultats de la question 8.

Partie III : Méthode des rectangles

10°) Soit n un entier naturel non nul. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq n$.

◇ On a $0 \leq \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} \leq 1$, donc $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \subset [0, 1]$. Or, d'après la question 5, f est décroissante sur $[0, 1]$, donc, lorsque $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right)$.

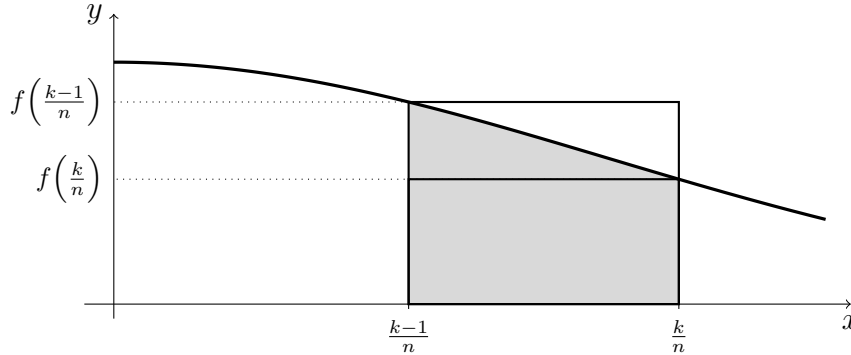
Les bornes étant dans l'ordre croissant, la croissance de l'intégrale donne

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k-1}{n}\right) dt,$$

or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \lambda dt = \frac{\lambda}{n}$, donc $\left[\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right]$.

◇ La quantité $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est l'aire du rectangle de base $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ sur l'axe des abscisses et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$. Comme f est décroissante sur cet intervalle, ce rectangle est *inclus* dans la portion de plan comprise entre Γ et l'axe des abscisses, en restreignant x à $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$: c'est l'interprétation graphique de l'inégalité $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt$ (l'intégrale d'une fonction positive est l'aire du domaine situé sous sa courbe).

De même, la seconde inégalité correspond au fait que cette portion de plan est *incluse* dans le rectangle de même base et de hauteur $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$. Sur la figure ci-dessous, la région grisée est le domaine situé sous Γ , encadré par les deux rectangles.



11°)

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles, on montre par récurrence que, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{k=1}^p \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt = \int_0^{\frac{p}{n}} f(t) dt$. En particulier, lorsque $p = n$, on

obtient que $\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = A$. Ainsi, en sommant l'encadrement de la question précédente lorsque $k \in \{1, \dots, n\}$, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq A \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Or, par le changement d'indice $j = k - 1$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} (f(0) - f(1)) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) = u_n + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right),$$

car $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Ainsi, $\boxed{u_n \leq A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}}}$.

◇ La première inégalité de cet encadrement donne $u_n \leq A$ et la seconde donne $u_n \geq A - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{e}}$. Ainsi, $A - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \leq u_n \leq A$.

Or $\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, d'après le principe des gendarmes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A}$.

12°) D'après la question 11, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A - u_n \leq \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Or $e \leq \frac{25}{9}$, donc $\sqrt{e} \leq \frac{5}{3}$, puis $\frac{1}{\sqrt{e}} \geq \frac{3}{5}$ et enfin $1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq \frac{2}{5}$.

Ainsi, $0 \leq A - u_n \leq 10^{-2} \iff \frac{2}{5n} \leq 10^{-2} \iff n \geq \frac{200}{5} = 40$. Ainsi, avec $n = 40$, on peut affirmer que $\boxed{u_{40} \text{ est une valeur approchée par défaut de } A \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

Partie IV : Méthodes des trapèzes et du point milieu

Pour les questions 13 à 15, on remarquera que $[a, b] \subset [0, 1]$ et que $b - c = c - a = \frac{b - a}{2}$.

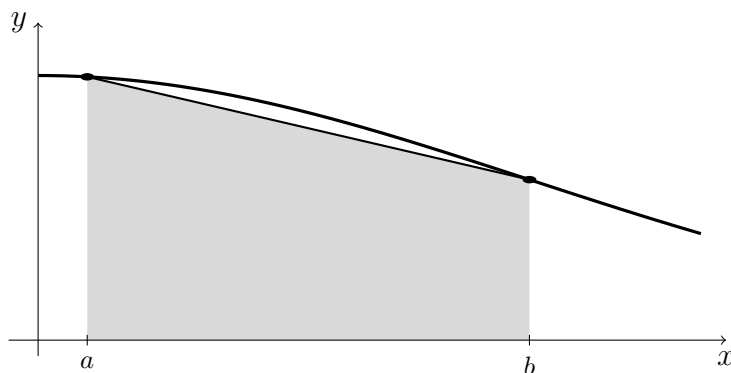
13°) ◇ La corde de Γ joignant les points d'abscisses a et b a pour équation $y - f(a) = p(x - a)$ où la pente p est égale au taux d'accroissement : $p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$,

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\tau(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_a^b \tau(t) dt &= \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) \right) dt = (b - a)f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left[\frac{(t - a)^2}{2} \right]_a^b \\ &= (b - a)f(a) + (f(b) - f(a)) \frac{b - a}{2} = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\boxed{\int_a^b \tau(t) dt = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}}$.

Géométriquement, cela signifie que $(b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$ est l'aire de la surface située sous la corde de Γ joignant les points d'abscisses a et b , lorsque l'abscisse x varie entre a et b . Il s'agit d'un trapèze, grisé sur la figure ci-dessous.

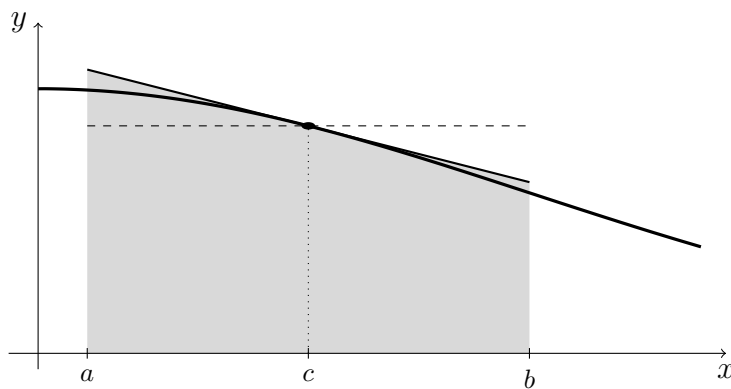


◇ D'après la question 8.a, $\int_a^b u_c(t) dt = \int_a^b (f(c) + f'(c)(t-c)) dt$, donc

$$\int_a^b u_c(t) dt = (b-a)f(c) + f'(c) \left[\frac{(t-c)^2}{2} \right]_a^b = (b-a)f(c), \text{ car } (b-c)^2 = (a-c)^2, \text{ donc}$$

le crochet est nul : on a bien montré que $\boxed{\int_a^b u_c(t) dt = (b-a)f(c)}$.

Géométriquement, cela signifie que $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est l'aire du trapèze situé sous la tangente à Γ au point d'abscisse c , lorsque l'abscisse x varie entre a et b . C'est aussi l'aire du rectangle de base $[a, b]$ sur l'axe des x et de hauteur $f(c)$: sur la figure ci-dessous, les deux petits triangles situés de part et d'autre du point de contact se compensent exactement.



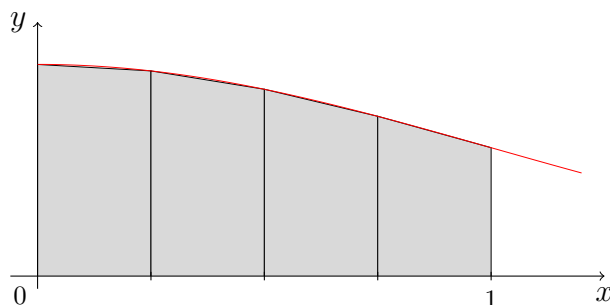
Le trapèze grisé est délimité par la tangente ; le rectangle en pointillé, de hauteur $f(c)$, a la même aire.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

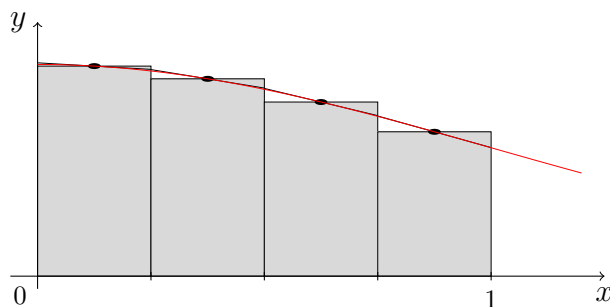
Lorsque $k \in \{1, \dots, n\}$, en appliquant la première égalité avec $a = \frac{k-1}{n}$ et $b = \frac{k}{n}$, on obtient que $\frac{1}{2n} \left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$ est égal à l'aire du trapèze situé sous la corde de Γ entre les abscisses $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$. Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} \left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = v_n, \text{ donc } v_n \text{ est la somme}$$

des aires des n trapèzes construits sur les cordes de Γ d'extrémités d'abscisses $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$ (figure ci-dessous, pour $n = 4$). Comme f est concave sur $[0, 1]$, ces trapèzes sont situés sous Γ (représentée en rouge sur la figure), ce qui rend l'inégalité $v_n \leq A$ géométriquement évidente.



◇ De même, la seconde égalité montre que w_n est la somme, pour k variant entre 1 et n , des aires des trapèzes construits sur les tangentes à Γ aux points d'abscisses $\frac{2k-1}{2n}$, c'est-à-dire au milieu des abscisses $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$. C'est aussi la somme des aires des rectangles de base $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ sur l'axe des x et de hauteur $f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$ (figure ci-dessous, pour $n = 4$). Comme f est concave sur $[0, 1]$, Γ , représentée en rouge sur la figure, est située sous ces tangentes, ce qui rend l'inégalité $A \leq w_n$ géométriquement évidente.



Chaque rectangle grisé a la même aire que le trapèze délimité par la tangente en le point milieu.

14°) ◇ En effectuant deux intégrations par parties successives, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t) dt &= \left[(t-a)(t-b)f'(t) \right]_a^b - \int_a^b (2t-a-b)f'(t) dt \\
&= - \int_a^b (2t-a-b)f'(t) dt \\
&= \left[(a+b-2t)f(t) \right]_a^b + 2 \int_a^b f(t) dt \\
&= -(b-a)(f(a)+f(b)) + 2 \int_a^b f(t) dt.
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{\int_a^b f(t) dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b)f''(t) dt.}$

◇ En effectuant à nouveau deux intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}
\int_a^c (t-a)^2 f''(t) dt &= \left[(t-a)^2 f'(t) \right]_a^c - 2 \int_a^c (t-a)f'(t) dt \\
&= (c-a)^2 f'(c) - 2 \left(\left[(t-a)f(t) \right]_a^c - \int_a^c f(t) dt \right) \\
&= (c-a)^2 f'(c) - 2(c-a)f(c) + 2 \int_a^c f(t) dt,
\end{aligned}$$

et d'autre part, de la même façon,

$$\begin{aligned}
\int_c^b (t-b)^2 f''(t) dt &= \left[(t-b)^2 f'(t) \right]_c^b - 2 \int_c^b (t-b)f'(t) dt \\
&= -(c-b)^2 f'(c) - 2 \left(\left[(t-b)f(t) \right]_c^b - \int_c^b f(t) dt \right) \\
&= -(c-b)^2 f'(c) + 2(c-b)f(c) + 2 \int_c^b f(t) dt.
\end{aligned}$$

Comme $(c-a)^2 = (c-b)^2$, les termes en $f'(c)$ se compensent lors de l'addition. De plus $-2(c-a)f(c) + 2(c-b)f(c) = -2(b-a)f(c)$ et, d'après la relation de Chasles,

$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. En sommant les deux égalités, on obtient donc

$$\int_a^c (t-a)^2 f''(t) dt + \int_c^b (t-b)^2 f''(t) dt = 2 \int_a^b f(t) dt - 2(b-a)f(c), \text{ c'est-à-dire}$$

$$\boxed{\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c) + \frac{1}{2} \left(\int_a^c (t-a)^2 f''(t) dt + \int_c^b (t-b)^2 f''(t) dt \right)}.$$

15°) Comme $[a, b] \subset [0, 1]$, la question 7.a donne $-1 \leq f''(t) \leq 0$,

c'est-à-dire $0 \leq -f''(t) \leq 1$, pour tout $t \in [a, b]$.

◇ Pour $t \in [a, b]$, $(t-a)(t-b)f''(t) = (t-a)(b-t) \times (-f''(t))$, avec $(t-a)(b-t) \geq 0$, donc $0 \leq (t-a)(t-b)f''(t) \leq (t-a)(b-t)$.

Par croissance de l'intégrale, puis par le changement de variable $t = s + a$ (question 4),

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b (t-a)(t-b)f''(t) dt &\leq \int_a^b (t-a)(b-t) dt \\
&= \int_0^{b-a} s(b-a-s) ds \\
&= (b-a)\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-a)^3}{3} \\
&= \frac{(b-a)^3}{6}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la première égalité de la question 14,

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{(b-a)^3}{12}.$$

◇ Pour $t \in [a, c]$, $(t-a)^2 \geq 0$ et $-1 \leq f''(t) \leq 0$, donc $-(t-a)^2 \leq (t-a)^2 f''(t) \leq 0$, d'où, par croissance de l'intégrale,

$$-\frac{(c-a)^3}{3} = -\int_a^c (t-a)^2 dt \leq \int_a^c (t-a)^2 f''(t) dt \leq 0.$$

$$\text{De même, } -\frac{(b-c)^3}{3} = -\int_c^b (t-b)^2 dt \leq \int_c^b (t-b)^2 f''(t) dt \leq 0.$$

Or $(c-a)^3 = (b-c)^3 = \frac{(b-a)^3}{8}$, donc la somme des deux intégrales appartient à $\left[-\frac{(b-a)^3}{12}, 0\right]$, et sa moitié à $\left[-\frac{(b-a)^3}{24}, 0\right]$.

Ainsi, d'après la seconde égalité de la question 14,

$$0 \leq (b-a)f(c) - \int_a^b f(t) dt \leq \frac{(b-a)^3}{24}.$$

16°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, appliquons la question précédente avec

$a = \frac{k-1}{n}$ et $b = \frac{k}{n}$ (licite car $0 \leq \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} \leq 1$), dont le milieu est $c = \frac{2k-1}{2n}$ et

pour lesquels $b-a = \frac{1}{n}$. On obtient : $0 \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2} \leq \frac{1}{12n^3}$ et

$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{24n^3}$. Alors, en sommant ces inégalités pour k allant

de 1 à n et en utilisant les relations établies en question 13, on en déduit que

$$0 \leq A - v_n \leq n \times \frac{1}{12n^3} = \frac{1}{12n^2} \quad \text{et} \quad 0 \leq w_n - A \leq n \times \frac{1}{24n^3} = \frac{1}{24n^2}.$$

En particulier $v_n \leq A \leq w_n$. De plus $\frac{1}{12n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{24n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, d'après le principe des gendarmes,

$$\boxed{\text{les suites } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ convergent vers } A}.$$

17°) D'après la question précédente, $v_3 \leq A \leq w_3$, donc, avec les encadrements admis, $0,84998 \leq v_3 \leq A \leq w_3 \leq 0,85846$. On en déduit que $0,84 < A < 0,86$, donc

$|A - 0,85| < 10^{-2}$, ce qui prouve que

$0,85$ est une valeur décimale approchée de A à 10^{-2} près.

Ainsi, on obtient une valeur approchée de A à 10^{-2} près par cette méthode en utilisant seulement $n = 3$, là où la méthode des rectangles réclamait $n = 40$.

18°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En isolant le terme d'indice n dans u_n ,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1), \text{ tandis que } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{2n} f(1),$$

$$\text{donc } v_n - u_n = \frac{1}{2n} f(0) + \frac{1}{2n} f(1) - \frac{1}{n} f(1) = \frac{f(0) - f(1)}{2n}.$$

$$\diamond \text{ Par conséquent, } n(A - u_n) = n(A - v_n) + n(v_n - u_n) = n(A - v_n) + \frac{f(0) - f(1)}{2}.$$

Or, d'après la question 16, $0 \leq n(A - v_n) \leq \frac{1}{12n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $n(A - v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après le principe des gendarmes.

Ainsi, la suite $(n(A - u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{n(A - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(0) - f(1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}.$$

Ceci prouve que l'erreur de la méthode des rectangles évolue comme $\frac{1}{n}$ alors que d'après la question 16, les erreurs des méthodes des trapèzes ou du point milieu sont inférieures à $\frac{C}{n^2}$, où C est une constante.

19°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons C_n la condition $\int_a^b t^n dt = \frac{b-a}{6}(a^n + 4c^n + b^n)$. Alors

$$\begin{aligned} C_n &\iff \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b-a}{6} \left(a^n + b^n + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^n \right) \\ &\iff 6 \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} = (n+1) \left(a^n + b^n + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Bernoulli,

$$C_n \iff 6 \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = (n+1) \left(a^n + b^n + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^n \right).$$

$\diamond$ Lorsque $n = 0$, $C_0 \iff 6 = 1 + 1 + 4$, donc C_0 est vraie.

$\diamond$ Lorsque $n = 1$, $C_1 \iff 6(a+b) = 2(a+b+2(a+b))$, donc C_1 est vraie.

$\diamond$ Lorsque $n = 2$,

$$\begin{aligned} C_2 &\iff 6(a^2 + ab + b^2) = 3(a^2 + b^2 + (a+b)^2) \\ &\iff 6(a^2 + ab + b^2) = 3(2a^2 + 2b^2 + 2ab), \end{aligned}$$

donc C_2 est vraie.

$\diamond$ Lorsque $n = 3$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} C_3 &\iff 6(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 4(a^3 + b^3 + \frac{1}{2}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)) \\ &\iff 6(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 2(3a^3 + 3b^3 + 3ab^2 + 3a^2b), \end{aligned}$$

donc C_3 est également vraie.

$$\diamond \text{ Ainsi, pour tout } n \in \{0, 1, 2, 3\}, \int_a^b t^n dt = \frac{b-a}{6}(a^n + 4c^n + b^n).$$

Soit maintenant P un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Il

existe $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \sum_{n=0}^3 p_n X^n$. Alors $\int_a^b P(t) dt = \sum_{n=0}^3 p_n \int_a^b t^n dt$, donc d'après les points précédents, $\int_a^b P(t) dt = \sum_{n=0}^3 p_n \frac{b-a}{6} (a^n + 4c^n + b^n)$, ce qui prouve que $\int_a^b P(t) dt = \frac{b-a}{6} (P(a) + 4P(c) + P(b))$.

20°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt$.

En partie III, la méthode des rectangles revient à approcher chaque terme $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt$ par $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, c'est-à-dire à approcher f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 0 , qui coïncide avec f en $\frac{k}{n}$. On approche ainsi A par u_n . On a vu en question 18 que u_n converge vers A aussi vite, mais pas plus, que la suite $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

En partie IV, d'après la question 13, la méthode des trapèzes revient à approcher chaque terme $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt$ en approchant f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par le polynôme de degré ≤ 1 qui coïncide avec f en $\frac{k-1}{n}$ et en $\frac{k}{n}$. On approche ainsi A par v_n . On a vu en question 16 que la suite v_n tend vers A au moins aussi vite que la suite $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0. Ainsi, le fait d'approcher f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 1 fournit, pour un même entier n , une meilleure approximation de A que le fait d'approcher f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 0 .

On est donc en droit de penser que l'approximation sera bien meilleure si l'on approche f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 3 , noté P_k , qui coïncide avec f en $\frac{k-1}{n}$, $\frac{k}{n}$ et en leur milieu $\frac{1}{2}(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n})$. Informellement, un tel polynôme P_k existe car il dépend de 4 réels (ses coefficients de degrés 0,1,2 et 3) et qu'il doit vérifier 3 conditions. Il n'est sans doute pas unique, mais cela est sans importance ici : d'après la question précédente, $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} P_k(t) dt$ ne dépend que des valeurs de P_k en $\frac{k-1}{n}$, $\frac{2k-1}{2n}$

et $\frac{k}{n}$, c'est-à-dire des valeurs de f en ces trois points. Ainsi cette méthode revient à approcher $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt$ par $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} P_k(t) dt = \frac{1}{6n} \left(P_k\left(\frac{k-1}{n}\right) + 4P_k\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + P_k\left(\frac{k}{n}\right) \right)$, c'est-à-dire par $\frac{1}{6n} \left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 4f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$. Ainsi, on est en droit d'attendre une meilleure convergence vers A de la part de la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6n} \left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 4f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$. On calcule

$$S_n = \frac{1}{6n}(f(0) + f(1)) + \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right), \text{ donc } S_n = \frac{2w_n + v_n}{3}.$$

Remarque culturelle : Cette dernière méthode est celle de Simpson. On peut montrer que S_n converge vers A au moins aussi vite que $\frac{1}{n^4}$ converge vers 0.