DS 1 : un corrigé

Ce problème est librement inspiré du Problème 1 de l'épreuve de CAPES interne 2010. Plusieurs questions ont été ajoutées, supprimées ou remaniées.

Barème

Le barème comporte 57 points :
- Partie I, questions 1 à 4 (5 points) : 1 ;1 ;2 ;1.
- Partie II, questions 5 à 9 (19 points) : 2 ; 3,3,1 ; 3,1 ; 1,1,3 ; 1.
- Partie III, questions 10 à 12 (6 points) : 2 ;2 ;2.
- Partie IV, questions 13 à 20 (27 points) : 2+1+2 ;2+3 ;2+1 ;3 ;1 ;3 ;3 ;4.

Partie I : Préliminaires

1°) Soit $a, b \in I$ avec $a \leq b$; comme I est un intervalle, $[a, b] \subset I$.
g est de classe C^1 sur I, donc g' est continue sur $[a, b]$ et g est une primitive de g' sur $[a, b]$: d'après le théorème fondamental de l'analyse, $g(b) - g(a) = \displaystyle\int_a^b g'(t)\ dt$.
Or, pour tout $t \in [a, b]$, $m \leq g'(t) \leq M$, et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc, par croissance de l'intégrale,
$\displaystyle\int_a^b m\ dt \leq \int_a^b g'(t)\ dt \leq \int_a^b M\ dt$, c'est-à-dire $\boxed{m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a)}$.

2°) $\diamond$ φ et ψ sont dérivables sur I comme sommes de fonctions dérivables sur I et, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = g'(x) - m \geq 0$ et $\psi'(x) = g'(x) - M \leq 0$,
donc $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } I \text{ et } \psi \text{ est décroissante sur } I}$.
Pour la suite de cette question, soit $b \in I$ tel que $a \leq b$.
$\diamond$ φ est croissante sur I et $a \leq b$, donc $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, or $\varphi(a) = 0$,
donc $0 \leq g(b) - g(a) - m(b-a)$, c'est-à-dire $m(b-a) \leq g(b) - g(a)$.
$\diamond$ ψ est décroissante sur I, donc $\psi(b) \leq \psi(a) = 0$, c'est-à-dire $g(b) - g(a) \leq M(b-a)$.
Ainsi, $\boxed{m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a)}$: le résultat de la question 1 vaut sans hypothèse de continuité sur g'.

3°) h est continue sur l'intervalle I, donc h admet au moins une primitive H sur I.
θ est de classe C^1 de J dans I et H est dérivable sur I, donc $H \circ \theta$ est dérivable sur J et $(H \circ \theta)' = \theta' \times (H' \circ \theta) = \theta' \times (h \circ \theta)$. $H \circ \theta$ est donc une primitive sur J de l'application continue $t \longmapsto h(\theta(t))\theta'(t)$. Par conséquent, pour tous $\alpha, \beta \in J$,

$\displaystyle\int_\alpha^\beta h(\theta(t))\theta'(t)\ dt = (H\circ\theta)(\beta) - (H\circ\theta)(\alpha) = H(\theta(\beta)) - H(\theta(\alpha)) = \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} h(x)\ dx,$
la dernière égalité venant de ce que H est une primitive de h sur I et que $\theta(\alpha), \theta(\beta) \in I$.

4°) $\diamond$ Notons $J = \{-t \ / \ t \in I\}$: J est bien un intervalle non vide et non réduit à un point. Notons θ l'application de J dans I telle que, pour tout $t \in J$, $\theta(t) = -t$. θ étant de classe C^1, on peut appliquer la question précédente. Or $\theta' = -1$, donc $\displaystyle\int_{-a}^{-b} h(-t)\times(-1)\ dt = \int_a^b h(x)\ dx$, c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx = \int_{-b}^{-a} h(-t)\ dt}$.
$\diamond$ De même, on note maintenant $J = \{t \in \mathbb{R} \ / \ t + c \in I\}$: J est bien un intervalle non vide et non réduit à un point. Notons θ l'application de J dans I telle que, pour tout $t \in J$, $\theta(t) = t + c$. θ étant de classe C^1, on peut appliquer la question précédente. Or $\theta' = 1$, donc $\boxed{\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx = \int_{a-c}^{b-c} h(t+c)\ dt}$.

Partie II : Étude d'une fonction gaussienne

5°) $\diamond$ f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$, donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

$\diamond$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction polynomiale $x \longmapsto -\dfrac{x^2}{2}$ et de l'exponentielle, toutes deux dérivables, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ car $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ et $\{x \in \mathbb{R}_+ \ / \ f'(x) = 0\} = \{0\}$ est fini, donc d'après le cours, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[}$.

$\diamond$ $-\dfrac{x^2}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^X \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; par parité, on a aussi $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par parité toujours, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, et $f(0) = 1$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

6°) Les dérivées successives de f

6.a) $\diamond$ *Existence.* Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion : "f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)} = P_n f$".
$R(0)$ est vraie avec $P_0 = 1$ (fonction polynomiale constante).
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ soit vraie. Alors $f^{(n)} = P_n f$ est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: f est $n+1$ fois dérivable, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)f(x) + P_n(x)f'(x) = P_n'(x)f(x) - xP_n(x)f(x)$, donc $f^{(n+1)} = P_{n+1}f$, en posant $\boxed{P_{n+1} = P_n' - XP_n}$. Ceci prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: f est n fois dérivable pour tout n, donc $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

◇ *Unicité.* Si (Q_n) est une autre suite convenable, alors pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x)f(x) = Q_n(x)f(x)$, or $f(x) \neq 0$, donc $P_n(x) = Q_n(x)$: les fonctions polynomiales P_n et Q_n coïncident sur $\mathbb{R}$, donc sont égales. Ceci prouve l'unicité.

6.b) ◇ Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.
C'est vrai pour $n = 0$: $P_0 = 1$ est de degré 0 et de coefficient dominant $1 = (-1)^0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = (-1)^n X^n + R$ avec $\deg R < n$. Alors P_n' est de degré au plus $n-1$, tandis que $-XP_n = (-1)^{n+1}X^{n+1} - XR$ est de degré $n+1$, de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$. La somme $P_{n+1} = P_n' - XP_n$ est donc de degré $n+1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$. Ainsi, $\boxed{\deg P_n = n \text{ et le coefficient dominant de } P_n \text{ est } (-1)^n}$.
◇ La relation $P_{n+1} = P_n' - XP_n$ donne successivement :
$\boxed{P_1 = -X}$, $\boxed{P_2 = X^2 - 1}$, $\boxed{P_3 = -X^3 + 3X}$, $\boxed{P_4 = X^4 - 6X^2 + 3}$.

6.c) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les questions 6.a et 6.b, $f''(x) = P_2(x)f(x) = (x^2-1)f(x)$.
Or $f(x) > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 1$: $f''(x) \leq 0$ sur $[0,1]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$. De plus, $\{x \in \mathbb{R}_+ \ / \ f''(x) = 0\} = \{1\}$ est fini, donc d'après le cours,
$\boxed{f' \text{ est strictement décroissante sur } [0,1] \text{ et strictement croissante sur } [1,+\infty[}$.

7°) Quelques encadrements

7.a) Soit $x \in [0,1]$. $-\dfrac{x^2}{2} \leq 0$ et l'exponentielle est croissante, donc $0 < f(x) \leq e^0 = 1$.
◇ On a $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$. Par produit de ces encadrements de réels positifs, $0 \leq (1-x^2)f(x) \leq 1$, or $f''(x) = -(1-x^2)f(x)$, donc $\boxed{-1 \leq f''(x) \leq 0}$.
◇ D'après 6.b, $f^{(4)}(x) = q(x)f(x)$ où $q(x) = x^4 - 6x^2 + 3$.
q est dérivable sur $[0,1]$ et $q'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2-3) \leq 0$ pour $x \in [0,1]$, donc q est décroissante sur $[0,1]$: $-2 = q(1) \leq q(x) \leq q(0) = 3$.
◇ Si $q(x) \geq 0$: comme $0 < f(x) \leq 1$, on a $0 \leq q(x)f(x) \leq q(x) \leq 3$.
◇ Si $q(x) < 0$: comme $0 < f(x) \leq 1$, on a $-2 \leq q(x) \leq q(x)f(x) < 0$.
Dans les deux cas, $\boxed{-2 \leq f^{(4)}(x) \leq 3}$.

7.b) ◇ On suppose que $0 \leq a < b \leq 1$. On a vu que f' est décroissante sur $[0,1]$, donc pour tout $x \in [a,b]$, $f'(b) \leq f'(x) \leq f'(a)$. D'après la question 2, on en déduit que $f'(b)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b-a)$.
◇ De même, f' étant croissante sur $[1,+\infty[$, lorsque $1 \leq a < b$, pour tout $x \in [a,b]$, $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)$, donc la question 2 montre que
$f'(a)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b-a)$.

8°) Étude des tangentes à la courbe Γ

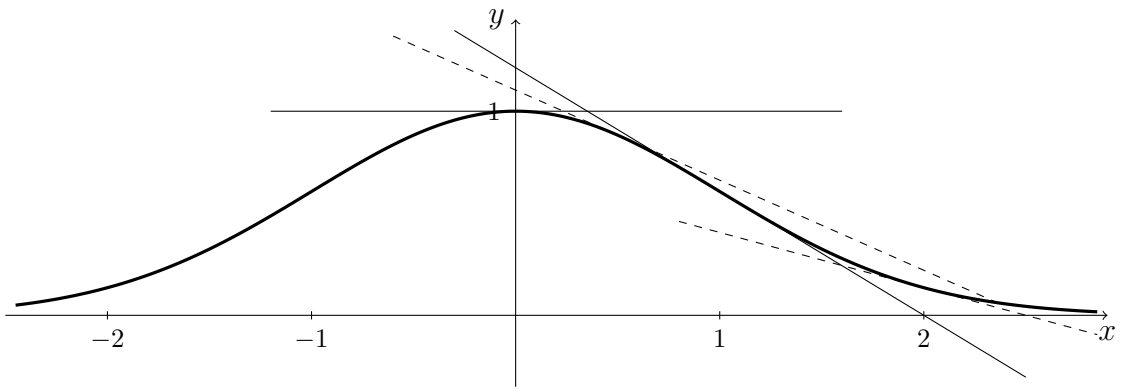
8.a) T_a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$u_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, or $f'(a) = -af(a)$, donc $\boxed{u_a(x) = e^{-\frac{a^2}{2}}(1 - a(x-a))}$.

8.b) Soit $a, x \in \mathbb{R}$. f étant de classe C^∞, les applications $t \longmapsto x - t$ et f' sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut donc intégrer par parties :
$$\int_a^x (x-t)f''(t)\ dt = \Big[(x-t)f'(t)\Big]_a^x + \int_a^x f'(t)\ dt = -(x-a)f'(a) + f(x) - f(a),$$

c'est-à-dire $\boxed{f(x) - u_a(x) = \displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)\ dt}$.

8.c) ◇ Supposons $a \in [0,1]$ et soit $x \in [0,1]$. D'après la question 7.a, $f'' \leq 0$ sur $[0,1]$. Si $x \geq a$: pour tout $t \in [a,x]$, $x - t \geq 0$ et $f''(t) \leq 0$, donc $(x-t)f''(t) \leq 0$ et, par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $\displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)\ dt \leq 0$.
Si $x < a$: pour tout $t \in [x,a]$, $x - t \leq 0$ et $f''(t) \leq 0$, donc $(x-t)f''(t) \geq 0$ et $\displaystyle\int_x^a (x-t)f''(t)\ dt \geq 0$, d'où $\displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)\ dt \leq 0$.
Dans les deux cas, d'après 8.b, $\boxed{f(x) \leq u_a(x)}$.
Ainsi, lorsque $a \in [0,1]$, en limitant le domaine des abscisses à $[0,1]$, Γ est située en dessous de T_a.
C'est en fait un résultat connu de Terminale : f'' est négative sur $[0,1]$, donc f est concave sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe est au-dessous de chacune de ses tangentes.
◇ Supposons $a \in [1,+\infty[$ et soit $x \in [1,+\infty[$. D'après 6.c, $f'' \geq 0$ sur $[1,+\infty[$, et le même raisonnement, avec les inégalités inversées, donne $\displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)\ dt \geq 0$, donc $\boxed{f(x) \geq u_a(x)}$: sur $[1,+\infty[$, Γ est située au-dessus de T_a, ce qui signifie que f est convexe sur cet intervalle.
◇ Étudions plus précisément le cas où $a = 1$: les deux points précédents montrent que Γ est au-dessous de T_1 lorsqu'on limite le domaine des abscisses à $[0,1]$ et au-dessus sur $[1,+\infty[$. Ainsi, au voisinage de 1, la tangente T_1 traverse la courbe Γ. C'est attendu car on a vu qu'il y a changement de convexité en 1, donc le point $(1, f(1))$ est un point d'inflexion de Γ.

9°)



On a tracé les tangentes T_0 et T_1 en traits pleins, d'équation respective : $T_0 : y = 1$ et $T_1 : y = e^{-\frac{1}{2}}(2-x)$. Deux autres tangentes sont tracées en pointillé pour illustrer les résultats de la question 8.

Partie III : Méthode des rectangles

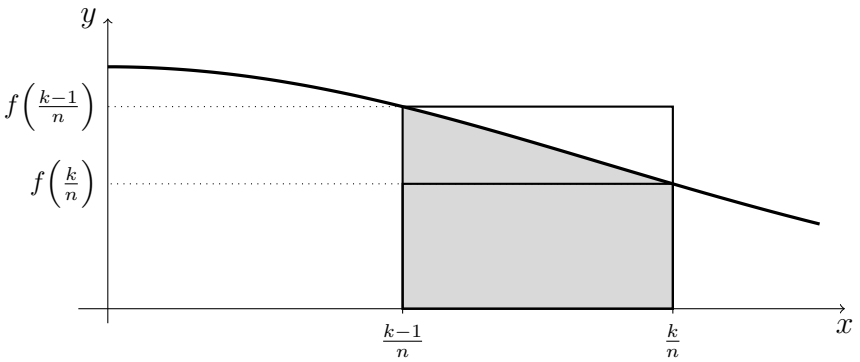
10°) Soit n un entier naturel non nul. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq n$.

◇ On a $0 \leq \dfrac{k-1}{n} < \dfrac{k}{n} \leq 1$, donc $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right] \subset [0,1]$. Or, d'après la question 5, f est décroissante sur $[0,1]$, donc, lorsque $t \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$, $f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) \leq f(t) \leq f\Big(\dfrac{k-1}{n}\Big)$.
Les bornes étant dans l'ordre croissant, la croissance de l'intégrale donne

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\, dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\, dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\, dt,$$

or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \lambda\, dt = \frac{\lambda}{n}$, donc $\boxed{\dfrac{1}{n} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) \leq \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)}$.

◇ La quantité $\dfrac{1}{n} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$ est l'aire du rectangle de base $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$ sur l'axe des abscisses et de hauteur $f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$. Comme f est décroissante sur cet intervalle, ce rectangle est *inclus* dans la portion de plan comprise entre Γ et l'axe des abscisses, en restreignant x à $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$: c'est l'interprétation graphique de l'inégalité $\dfrac{1}{n} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) \leq \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\, dt$ (l'intégrale d'une fonction positive est l'aire du domaine situé sous sa courbe).
De même, la seconde inégalité correspond au fait que cette portion de plan est *incluse* dans le rectangle de même base et de hauteur $f\Big(\dfrac{k-1}{n}\Big)$. Sur la figure ci-dessous, la région grisée est le domaine situé sous Γ, encadré par les deux rectangles.



11°)

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles, on montre par récurrence que, pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\, dt = \int_0^{\frac{p}{n}} f(t)\, dt$. En particulier, lorsque $p = n$, on obtient que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt = A$. Ainsi, en sommant l'encadrement de la question précédente lorsque $k \in \{1, \ldots, n\}$, on obtient

$u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \leq A \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)$.
Or, par le changement d'indice $j = k-1$,
$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-1}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\Big(\frac{j}{n}\Big) = \frac{1}{n}\Big(f(0) - f(1)\Big) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\Big(\frac{j}{n}\Big) = u_n + \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\Big)$,
car $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Ainsi, $\boxed{u_n \leq A \leq \dfrac{1}{n} + u_n - \dfrac{1}{n\sqrt{e}}}$.
$\diamond$ La première inégalité de cet encadrement donne $u_n \leq A$ et la seconde donne $u_n \geq A - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{e}}$. Ainsi, $A - \dfrac{1}{n}\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\Big) \leq u_n \leq A$.
Or $\dfrac{1}{n}\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après le principe des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A}$.

12°) D'après la question 11, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A - u_n \leq \dfrac{1}{n}\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\Big)$.
Or $e \leq \dfrac{25}{9}$, donc $\sqrt{e} \leq \dfrac{5}{3}$, puis $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \geq \dfrac{3}{5}$ et enfin $1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}} \leq \dfrac{2}{5}$.
Ainsi, $0 \leq A - u_n \leq 10^{-2} \Longleftarrow \dfrac{2}{5n} \leq 10^{-2} \Longleftarrow n \geq \dfrac{200}{5} = 40$. Ainsi, avec $n = 40$, on peut affirmer que $\boxed{u_{40} \text{ est une valeur approchée par défaut de } A \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

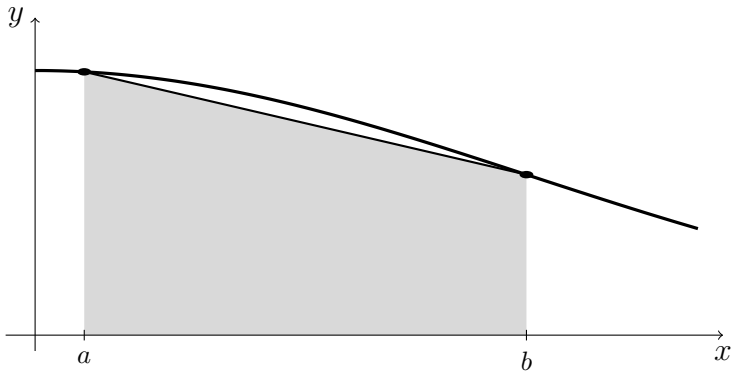
Partie IV : Méthodes des trapèzes et du point milieu

Pour les questions 13 à 15, on remarquera que $[a, b] \subset [0, 1]$ et que $b - c = c - a = \dfrac{b-a}{2}$.

13°) $\diamond$ La corde de Γ joignant les points d'abscisses a et b a pour équation $y - f(a) = p(x - a)$ où la pente p est égale au taux d'accroissement : $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$,
donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\tau(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$. On en déduit

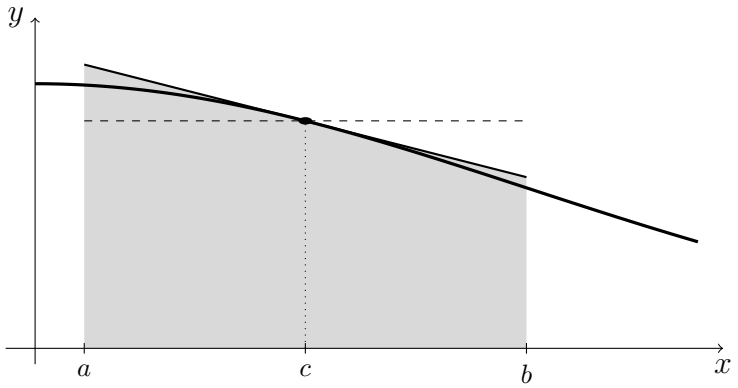
$$\begin{aligned}\int_a^b \tau(t)\ dt &= \int_a^b \Big(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)\Big)\ dt = (b - a)f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big[\frac{(t - a)^2}{2}\Big]_a^b \\ &= (b - a)f(a) + (f(b) - f(a))\frac{b - a}{2} = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\boxed{\displaystyle\int_a^b \tau(t)\ dt = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}}$.
Géométriquement, cela signifie que $(b - a)\dfrac{f(a) + f(b)}{2}$ est l'aire de la surface située sous la corde de Γ joignant les points d'abscisses a et b, lorsque l'abscisse x varie entre a et b. Il s'agit d'un trapèze, grisé sur la figure ci-dessous.



◇ D'après la question 8.a, $\displaystyle\int_a^b u_c(t)\ dt = \int_a^b (f(c) + f'(c)(t-c))\ dt$, donc $\displaystyle\int_a^b u_c(t)\ dt = (b-a)f(c) + f'(c)\Big[\frac{(t-c)^2}{2}\Big]_a^b = (b-a)f(c)$, car $(b-c)^2 = (a-c)^2$, donc le crochet est nul : on a bien montré que $\boxed{\displaystyle\int_a^b u_c(t)\ dt = (b-a)f(c)}$.

Géométriquement, cela signifie que $(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$ est l'aire du trapèze situé sous la tangente à Γ au point d'abscisse c, lorsque l'abscisse x varie entre a et b. C'est aussi l'aire du rectangle de base $[a,b]$ sur l'axe des x et de hauteur $f(c)$: sur la figure ci-dessous, les deux petits triangles situés de part et d'autre du point de contact se compensent exactement.

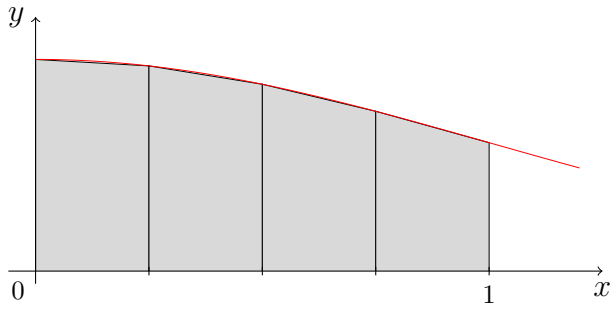


Le trapèze grisé est délimité par la tangente ; le rectangle en pointillé, de hauteur $f(c)$, a la même aire.

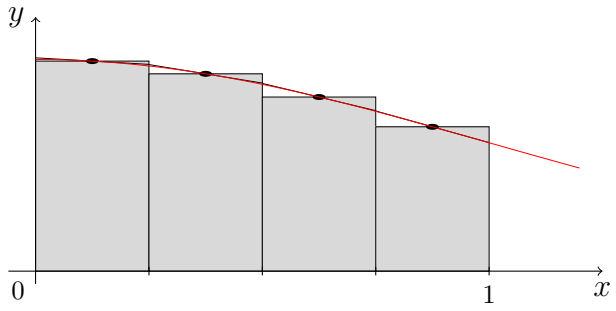
◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque $k \in \{1, \dots, n\}$, en appliquant la première égalité avec $a = \dfrac{k-1}{n}$ et $b = \dfrac{k}{n}$, on obtient que $\dfrac{1}{2n}\Big(f\Big(\dfrac{k-1}{n}\Big) + f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big)$ est égal à l'aire du trapèze situé sous la corde de Γ entre les abscisses $\dfrac{k-1}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$. Or

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\Big(f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)+f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)=\frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)+\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)=v_n$, donc v_n est la somme des aires des n trapèzes construits sur les cordes de Γ d'extrémités d'abscisses $\dfrac{k-1}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$ (figure ci-dessous, pour $n=4$). Comme f est concave sur $[0,1]$, ces trapèzes sont situés sous Γ (représentée en rouge sur la figure), ce qui rend l'inégalité $v_n\leq A$ géométriquement évidente.



$\diamond$ De même, la seconde égalité montre que w_n est la somme, pour k variant entre 1 et n, des aires des trapèzes construits sur les tangentes à Γ aux points d'abscisses $\dfrac{2k-1}{2n}$, c'est-à-dire au milieu des abscisses $\dfrac{k-1}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$. C'est aussi la somme des aires des rectangles de base $\Big[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\Big]$ sur l'axe des x et de hauteur $f\Big(\dfrac{2k-1}{2n}\Big)$ (figure ci-dessous, pour $n=4$). Comme f est concave sur $[0,1]$, Γ, représentée en rouge sur la figure, est située sous ces tangentes, ce qui rend l'inégalité $A\leq w_n$ géométriquement évidente.



Chaque rectangle grisé a la même aire que le trapèze délimité par la tangente en le point milieu.

14°) $\diamond$ En effectuant deux intégrations par parties successives, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\ dt &= \Big[(t-a)(t-b)f'(t)\Big]_a^b - \int_a^b (2t-a-b)f'(t)\ dt\\ &= -\int_a^b (2t-a-b)f'(t)\ dt\\ &= \Big[(a+b-2t)f(t)\Big]_a^b + 2\int_a^b f(t)\ dt\\ &= -(b-a)(f(a)+f(b)) + 2\int_a^b f(t)\ dt.\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\ dt.}$

$\diamond$ En effectuant à nouveau deux intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}\int_a^c (t-a)^2 f''(t)\ dt &= \Big[(t-a)^2 f'(t)\Big]_a^c - 2\int_a^c (t-a)f'(t)\ dt\\ &= (c-a)^2 f'(c) - 2\Big(\Big[(t-a)f(t)\Big]_a^c - \int_a^c f(t)\ dt\Big)\\ &= (c-a)^2 f'(c) - 2(c-a)f(c) + 2\int_a^c f(t)\ dt,\end{aligned}$$

et d'autre part, de la même façon,

$$\begin{aligned}\int_c^b (t-b)^2 f''(t)\ dt &= \Big[(t-b)^2 f'(t)\Big]_c^b - 2\int_c^b (t-b)f'(t)\ dt\\ &= -(c-b)^2 f'(c) - 2\Big(\Big[(t-b)f(t)\Big]_c^b - \int_c^b f(t)\ dt\Big)\\ &= -(c-b)^2 f'(c) + 2(c-b)f(c) + 2\int_c^b f(t)\ dt.\end{aligned}$$

Comme $(c-a)^2 = (c-b)^2$, les termes en $f'(c)$ se compensent lors de l'addition. De plus $-2(c-a)f(c) + 2(c-b)f(c) = -2(b-a)f(c)$ et, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. En sommant les deux égalités, on obtient donc

$\displaystyle\int_a^c (t-a)^2 f''(t)\ dt + \int_c^b (t-b)^2 f''(t)\ dt = 2\int_a^b f(t)\ dt - 2(b-a)f(c)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = (b-a)f(c) + \frac{1}{2}\Big(\int_a^c (t-a)^2 f''(t)\ dt + \int_c^b (t-b)^2 f''(t)\ dt\Big)}.$$

15°) Comme $[a,b] \subset [0,1]$, la question 7.a donne $-1 \leq f''(t) \leq 0$,
c'est-à-dire $0 \leq -f''(t) \leq 1$, pour tout $t \in [a,b]$.

$\diamond$ Pour $t \in [a,b]$, $(t-a)(t-b)f''(t) = (t-a)(b-t) \times (-f''(t))$, avec $(t-a)(b-t) \geq 0$, donc $0 \leq (t-a)(t-b)f''(t) \leq (t-a)(b-t)$.

Par croissance de l'intégrale, puis par le changement de variable $t = s+a$ (question 4),

$$0 \leq \int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\ dt \quad \leq \int_a^b (t-a)(b-t)\ dt$$
$$= \int_0^{b-a} s(b-a-s)\ ds$$
$$= (b-a)\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-a)^3}{3}$$
$$= \frac{(b-a)^3}{6}.$$

Ainsi, d'après la première égalité de la question 14,

$$\boxed{0 \leq \int_a^b f(t)\ dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{(b-a)^3}{12}}.$$

$\diamond$ Pour $t \in [a,c]$, $(t-a)^2 \geq 0$ et $-1 \leq f''(t) \leq 0$, donc $-(t-a)^2 \leq (t-a)^2 f''(t) \leq 0$, d'où, par croissance de l'intégrale,

$$-\frac{(c-a)^3}{3} = -\int_a^c (t-a)^2\ dt \leq \int_a^c (t-a)^2 f''(t)\ dt \leq 0.$$

De même, $-\dfrac{(b-c)^3}{3} = -\displaystyle\int_c^b (t-b)^2\ dt \leq \int_c^b (t-b)^2 f''(t)\ dt \leq 0$.

Or $(c-a)^3 = (b-c)^3 = \dfrac{(b-a)^3}{8}$, donc la somme des deux intégrales appartient à $\Big[-\dfrac{(b-a)^3}{12}, 0\Big]$, et sa moitié à $\Big[-\dfrac{(b-a)^3}{24}, 0\Big]$.

Ainsi, d'après la seconde égalité de la question 14,

$$\boxed{0 \leq (b-a)f(c) - \int_a^b f(t)\ dt \leq \frac{(b-a)^3}{24}}.$$

16°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, appliquons la question précédente avec $a = \dfrac{k-1}{n}$ et $b = \dfrac{k}{n}$ (licite car $0 \leq \dfrac{k-1}{n} < \dfrac{k}{n} \leq 1$), dont le milieu est $c = \dfrac{2k-1}{2n}$ et pour lesquels $b - a = \dfrac{1}{n}$. On obtient : $0 \leq \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\ dt - \frac{1}{n}\ \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2} \leq \frac{1}{12n^3}$ et $0 \leq \dfrac{1}{n} f\Big(\dfrac{2k-1}{2n}\Big) - \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\ dt \leq \frac{1}{24n^3}$. Alors, en sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n et en utilisant les relations établies en question 13, on en déduit que

$$\boxed{0 \leq A - v_n \leq n \times \frac{1}{12n^3} = \frac{1}{12n^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{0 \leq w_n - A \leq n \times \frac{1}{24n^3} = \frac{1}{24n^2}}.$$

En particulier $v_n \leq A \leq w_n$. De plus $\dfrac{1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{24n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après le principe des gendarmes,

$$\boxed{\text{les suites } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent vers } A}.$$

17°) D'après la question précédente, $v_3 \leq A \leq w_3$, donc, avec les encadrements admis, $0{,}84998 \leq v_3 \leq A \leq w_3 \leq 0{,}85846$. On en déduit que $0{,}84 < A < 0{,}86$, donc $|A - 0{,}85| < 10^{-2}$, ce qui prouve que

$$\boxed{0{,}85 \text{ est une valeur décimale approchée de } A \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}.$$

Ainsi, on obtient une valeur approchée de A à 10^{-2} près par cette méthode en utilisant seulement $n = 3$, là où la méthode des rectangles réclamait $n = 40$.

18°) ◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En isolant le terme d'indice n dans u_n,
$u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{n}f(1)$, tandis que $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2n}f(0) + \frac{1}{2n}f(1)$,
donc $v_n - u_n = \dfrac{1}{2n}f(0) + \dfrac{1}{2n}f(1) - \dfrac{1}{n}f(1) = \dfrac{f(0) - f(1)}{2n}$.
◇ Par conséquent, $n(A - u_n) = n(A - v_n) + n(v_n - u_n) = n(A - v_n) + \dfrac{f(0) - f(1)}{2}$.
Or, d'après la question 16, $0 \leq n(A - v_n) \leq \dfrac{1}{12n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $n(A - v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le principe des gendarmes.
Ainsi, la suite $\big(n(A - u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{n(A - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(0) - f(1)}{2} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\Big)}.$$

Ceci prouve que l'erreur de la méthode des rectangles évolue comme $\dfrac{1}{n}$ alors que d'après la question 16, les erreurs des méthodes des trapèzes ou du point milieu sont inférieures à $\dfrac{C}{n^2}$, où C est une constante.

19°) ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons C_n la condition $\displaystyle\int_a^b t^n\, dt = \frac{b-a}{6}(a^n + 4c^n + b^n)$. Alors
$C_n \iff \Big[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_a^b = \dfrac{b-a}{6}\Big(a^n + b^n + 4\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^n\Big)$
$\iff 6\dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} = (n+1)\Big(a^n + b^n + 4\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^n\Big)$.
Ainsi, d'après la formule de Bernoulli,
$C_n \iff 6\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (n+1)\Big(a^n + b^n + 4\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^n\Big)$.
◇ Lorsque $n = 0$, $C_0 \iff 6 = 1 + 1 + 4$, donc C_0 est vraie.
◇ Lorsque $n = 1$, $C_1 \iff 6(a+b) = 2(a + b + 2(a+b))$, donc C_1 est vraie.
◇ Lorsque $n = 2$,
$C_2 \iff 6(a^2 + ab + b^2) = 3(a^2 + b^2 + (a+b)^2)$
$\iff 6(a^2 + ab + b^2) = 3(2a^2 + 2b^2 + 2ab)$,
donc C_2 est vraie.
◇ Lorsque $n = 3$, d'après la formule du binôme de Newton,
$C_3 \iff 6(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 4(a^3 + b^3 + \frac{1}{2}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3))$
$\iff 6(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 2(3a^3 + 3b^3 + 3ab^2 + 3a^2b)$,
donc C_3 est également vraie.
◇ Ainsi, pour tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\displaystyle\int_a^b t^n\, dt = \frac{b-a}{6}(a^n + 4c^n + b^n)$.
Soit maintenant P un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Il

existe $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \sum_{n=0}^{3} p_n X^n$. Alors $\int_a^b P(t)\ dt = \sum_{n=0}^{3} p_n \int_a^b t^n\ dt$, donc d'après les points précédents, $\int_a^b P(t)\ dt = \sum_{n=0}^{3} p_n \frac{b-a}{6}(a^n + 4c^n + b^n)$, ce qui prouve que $\int_a^b P(t)\ dt = \frac{b-a}{6}(P(a) + 4P(c) + P(b))$.

20°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \int_0^1 f(t)\ dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\ dt$.

En partie III, la méthode des rectangles revient à approcher chaque terme $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\ dt$ par $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\ dt = \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$, c'est-à-dire à approcher f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 0, qui coïncide avec f en $\frac{k}{n}$. On approche ainsi A par u_n. On a vu en question 18 que u_n converge vers A aussi vite, mais pas plus, que la suite $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

En partie IV, d'après la question 13, la méthode des trapèzes revient à approcher chaque terme $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\ dt$ en approchant f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par le polynôme de degré ≤ 1 qui coïncide avec f en $\frac{k-1}{n}$ et en $\frac{k}{n}$. On approche ainsi A par v_n. On a vu en question 16 que la suite v_n tend vers A au moins aussi vite que la suite $\dfrac{1}{n^2}$ tend vers 0. Ainsi, le fait d'approcher f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 1 fournit, pour un même entier n, une meilleure approximation de A que le fait d'approcher f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 0.

On est donc en droit de penser que l'approximation sera bien meilleure si l'on approche f sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ par un polynôme de degré ≤ 3, noté P_k, qui coïncide avec f en $\frac{k-1}{n}$, $\frac{k}{n}$ et en leur milieu $\frac{1}{2}(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n})$. Informellement, un tel polynôme P_k existe car il dépend de 4 réels (ses coefficients de degrés 0,1,2 et 3) et qu'il doit vérifier 3 conditions. Il n'est sans doute pas unique, mais cela est sans importance ici : d'après la question précédente, $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} P_k(t)\ dt$ ne dépend que des valeurs de P_k en $\dfrac{k-1}{n}$, $\dfrac{2k-1}{2n}$ et $\dfrac{k}{n}$, c'est-à-dire des valeurs de f en ces trois points. Ainsi cette méthode revient à approcher $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\ dt$ par $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} P_k(t)\ dt = \frac{1}{6n}\Big(P_k\Big(\frac{k-1}{n}\Big) + 4P_k\Big(\frac{2k-1}{2n}\Big) + P_k\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$, c'est-à-dire par $\frac{1}{6n}\Big(f\Big(\frac{k-1}{n}\Big) + 4f\Big(\frac{2k-1}{2n}\Big) + f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$. Ainsi, on est en droit d'attendre une meilleure convergence vers A de la part de la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6n}\Big(f\Big(\frac{k-1}{n}\Big) + 4f\Big(\frac{2k-1}{2n}\Big) + f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$. On calcule

$S_n = \frac{1}{6n}(f(0)+f(1)) + \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{2k-1}{2n}\Big)$, donc $S_n = \frac{2w_n + v_n}{3}$.

Remarque culturelle : Cette dernière méthode est celle de Simpson. On peut montrer que S_n converge vers A au moins aussi vite que $\frac{1}{n^4}$ converge vers 0.