

Résumé de cours :
Semaine 4, du 21 au 25 septembre.

Dérivation et intégration : fin

1 Applications réciproques de la trigonométrie hyperbolique

Les fonctions réciproques des fonctions ch , sh et th ne sont pas au programme.

La fonction argsh : sh est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argsh (“argument sinus hyperbolique”). Ainsi argsh est une application C^∞ , impaire, strictement croissante. $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

A savoir établir : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

La fonction argch : L'application ch est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. Son application réciproque est notée argch . C'est une bijection continue strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.

ch est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1, +\infty[$, donc argch est C^∞ sur $]1, +\infty[$.

$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

La fonction argth : th est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argth . Ainsi argth est une application C^∞ , impaire, strictement croissante de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. $\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

2 Calculs d'intégrales

2.1 Changement de variables

Théorème. On suppose que f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, et que φ est une application de classe C^1 d'un intervalle J dans I . Alors,

$$\forall (\alpha, \beta) \in J^2 \quad \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.} \quad (1)$$

Lorsque l'on remplace un membre de cette égalité par l'autre, on dit que l'on effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Démonstration à connaître.

Propriété. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une application continue sur $[-a, a]$.

Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$. Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Théorème. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est une fonction continue et T -périodique définie sur $\mathbb{R}$.

Alors, $\forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \int_0^T f(t) dt = \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$.

Démonstration à connaître.

2.2 Intégration par parties

Théorème. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I .

Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$.

Démonstration à connaître.

Théorème. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I .

Alors, $\int u(t)v'(t) dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) dt$, $t \in I$.

Les ensembles

3 Ensembles et éléments

Axiome d'extensionnalité : Si E et F sont deux ensembles, alors

$E = F$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $x \in F$ et pour tout $x \in F$, $x \in E$.

Définition. $\{a\}$ est un singleton.

Lorsque $a \neq b$, $\{a, b\}$ est appelé une paire.

Définition. Un prédicat P sur un ensemble E est une application de E dans $\{V, F\}$, où V symbolise le vrai et F le faux.

Définition d'un ensemble en compréhension : Si E est un ensemble et P un prédicat sur E , alors $F = \{x \in E / P(x)\}$ est un ensemble.

De plus, pour tout $x \in E$, $x \in F \iff P(x)$.

Le paradoxe de Russell :

Notons A la collection de tous les ensembles et posons $B = \{x \in A / x \notin x\}$. Alors $B \in B$ si et seulement si $B \notin B$, ce qui est impossible. Cela signifie que A n'est pas un ensemble!

À connaître.

4 Quantificateurs

Définition du quantificateur universel :

Soit E un ensemble et P un prédicat sur E . La propriété " $\forall x \in E, P(x)$ " signifie que pour tous les éléments x de E , $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E / P(x)\}$ est égal à E .

Définition du quantificateur existentiel :

Avec les mêmes notations, la propriété " $\exists x \in E, P(x)$ " signifie qu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E / P(x)\} \neq \emptyset$.

Existence et unicité : La propriété " $\exists! x \in E, P(x)$ " signifie qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E / P(x)\}$ est un singleton.

Remarque. L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu : l'usage d'un " $\forall x$ " est toujours suivi d'un " $\in E, P(x)$ " (ou plus rarement d'un " $, P(x)$ "), où P est un prédicat sur E .

Remarque. Soit P un prédicat sur un ensemble E . Alors dans les phrases “ $\forall x \in E, P(x)$ ” et “ $\exists x \in E, P(x)$ ”, on peut remplacer la variable x par y , ou n'importe quel autre symbole. On dit que, dans les phrases “ $\forall x \in E, P(x)$ ” et “ $\exists x \in E, P(x)$ ”, x est une variable muette ou bien que c'est une variable liée. Dans la propriété “ $\exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ ”, y est une variable liée, et par opposition, on dit que x est une variable libre.

5 Parties d'un ensemble

Définition. Soit E et F deux ensembles.

On dit que F est inclus dans E et l'on note $F \subset E$ si et seulement si tout élément de F est un élément de E , c'est-à-dire si et seulement si $\forall x \in F, x \in E$.

Transitivité de l'inclusion : Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Définition. Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

6 Opérateurs sur les ensembles

Définition. Soit E et F deux ensembles :

- **Intersection :** $x \in E \cap F$ si et seulement si $(x \in E \text{ et } x \in F)$.
- **Réunion :** $x \in E \cup F$ si et seulement si $(x \in E \text{ ou } x \in F)$.
- **Différence ensembliste :** $E \setminus F = \{x \in E / x \notin F\}$.
- **Différence symétrique :** $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$.
- **Complémentaire de F dans E :** Si F est une partie de E , le complémentaire de F dans E est $\overline{F} = E \setminus F$, que l'on note plus rarement $\complement_E^F$.

Propriété. Si F et G sont deux parties d'un ensemble E , alors $F \setminus G = F \cap \overline{G}$.

Propriété. Associativité de l'intersection et de la réunion : Soit A, B, C trois ensembles. Alors, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Définition. Soit I un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. On définit $\bigcup_{i \in I} E_i$ et $\bigcap_{i \in I} E_i$ par :

$$x \in \bigcup_{i \in I} E_i \iff (\exists i \in I, x \in E_i) \text{ et } x \in \bigcap_{i \in I} E_i \iff (\forall i \in I, x \in E_i).$$

Cette dernière définition n'est pas correcte lorsque $I = \emptyset$.

Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i).$$

Il faut savoir le démontrer.

Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \text{ (avec } I \neq \emptyset \text{)}.$$

Notation. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints, c'est-à-dire telle que, pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est appelée une réunion disjointe et elle est notée $\bigsqcup_{i \in I} E_i$.

7 L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

On admet qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{N}$, satisfaisant les axiomes de Peano suivants :

- $\mathbb{N}$ est muni d'un élément particulier noté 0 et d'une application "successeur", notée s de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- 0 n'est le successeur d'aucun entier : $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \neq 0$.
- s est une application injective : pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, si $s(n) = s(m)$, alors $n = m$.
- Pour toute partie F de $\mathbb{N}$, si $0 \in F$ et si pour tout $n \in F$, $s(n) \in F$, alors $F = \mathbb{N}$.

Principe de récurrence : Soit $R(n)$ un prédicat sur $\mathbb{N}$.

Si $R(0)$ est vraie et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ implique $R(s(n))$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est vraie.

Addition entre entiers : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$0 + m = m$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, s(n) + m = s(n + m)$.

Ces conditions définissent l'addition entre entiers.

Propriétés de l'addition :

- 0 est neutre : $\forall m \in \mathbb{N}, m + 0 = 0 + m = m$.
- Associativité : $\forall n, m, k \in \mathbb{N}, (n + m) + k = n + (m + k)$.
- Commutativité : $\forall n, m \in \mathbb{N}, n + m = m + n$.

8 Produit cartésien

Définition. Si a et b sont deux objets, posons $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. On l'appellera le "couple de composantes a et b ". Alors, $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Si A et B sont deux ensembles, on pose $A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$. $A \times B$ s'appelle le produit cartésien de A et B .

Définition. Un couple est aussi un 2-uplet. Pour $n \geq 3$, on définit récursivement la notion de n -uplet (ou n -liste) en écrivant : $(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

Alors, $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i = b_i$.

Notation. $\mathbb{N}^*$ désigne $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont n ensembles, on pose

$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) / \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in A_i\}$.

Si E est un ensemble, on note $E^n = \underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$.

Remarque. Convention, lorsque $n = 1$, le "1-uplet" (a) est égal à a . Avec cette convention, $E^1 = E$.

Commutativité de deux quantificateurs universels :

Soit E et F deux ensembles. Notons $P(x, y)$ un prédicat défini sur $E \times F$. Alors

$$\begin{aligned} [\forall (x, y) \in E \times F, P(x, y)] &\iff [\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)] \\ &\iff [\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y)] \end{aligned}$$

Commutativité de deux quantificateurs existentiels : De même,

$$\begin{aligned} [\exists (x, y) \in E \times F, P(x, y)] &\iff [\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)] \\ &\iff [\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)] \end{aligned}$$

ATTENTION :

Un quantificateur universel ne commute pas avec un quantificateur existentiel.

“ $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$ ” si et seulement si il existe une application

$x \mapsto y(x)$ de E dans F tel que, pour tout $x \in E, P(x, y(x))$,

et “ $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$ ” si et seulement si il existe une application **constante**

$x \mapsto y_0$ de E dans F , telle que pour tout $x \in E, P(x, y_0)$.

On voit qu'en général, la seconde affirmation implique la première mais que la réciproque est fausse.

À savoir exposer.

9 Formules propositionnelles

9.1 Syntaxe

Définition par induction des formules propositionnelles : on part d'un ensemble $\mathcal{V}$ dont les éléments sont appelés des variables propositionnelles. On utilise également les “connecteurs logiques” suivants : $\wedge, \vee, \implies, \iff, \neg$.

L'ensemble F des formules propositionnelles est défini par induction structurale :

- Les variables propositionnelles sont des formules propositionnelles.
- si $P, Q \in F$, alors $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \implies Q), (P \iff Q)$ et $\neg P$ sont aussi des formules propositionnelles.

Plus précisément, si l'on note $F_0 = \mathcal{V}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+1} = F_n \cup \{\neg P / P \in F_n\} \cup \{(P \alpha Q) / P, Q \in F_n \text{ et } \alpha \in \{\wedge, \vee, \implies, \iff\}\}, \text{ alors } F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Remarque. Une formule propositionnelle s'appelle aussi une proposition, une assertion, une formule, un énoncé, une expression booléenne, etc.

Définition. Si P et Q sont deux formules propositionnelles, $P \wedge Q$ (prononcer “ P et Q ”) s'appelle la conjonction de P et de Q , $P \vee Q$ (prononcer “ P ou Q ”) s'appelle la disjonction de P et de Q , $P \implies Q$ s'appelle une implication, $P \iff Q$ est une équivalence, et $\neg P$ est la négation de la proposition P .

9.2 Sémantique

Définition. Une distribution de valeurs de vérité sur l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables propositionnelles est une application de $\mathcal{V}$ dans l'ensemble $\{V, F\}$.

Définition. Soit v une distribution de valeurs de vérité sur l'ensemble $\mathcal{V}$. On prolonge v sur l'ensemble des formules propositionnelles construites à partir de $\mathcal{V}$ de la manière suivante : pour toutes formules propositionnelles P et Q ,

- $v(P \wedge Q) = 1$ si et seulement si $v(P) = v(Q) = 1$.
- $v(P \vee Q) = 1$ si et seulement si $v(P) = 1$ ou $v(Q) = 1$.
- $v(P \implies Q) = 0$ si et seulement si $v(P) = 1$ et $v(Q) = 0$.
- $v(P \iff Q) = 1$ si et seulement si $v(P) = v(Q)$.
- $v(\neg P) = 1$ si et seulement si $v(P) = 0$.

Définition. La définition précédente est équivalente à la donnée des “tables de vérité” des connecteurs logiques $\wedge, \vee, \implies, \iff$ et $\neg$:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Définition. Lorsque $P \implies Q$, on dit que P est une *condition suffisante* pour Q et que Q est une *condition nécessaire* pour P .

Lorsque $P \iff Q$, on dit que P est une *condition nécessaire et suffisante* pour Q .

Définition. Une tautologie est une formule propositionnelle qui est toujours vraie, quelle que soit la distribution de valeurs de vérité des variables propositionnelles qui interviennent dans la formule.

Exemple. Quelques tautologies à connaître (A, B, C désignent des formules propositionnelles quelconques) :

1. $(A \vee (B \vee C)) \iff ((A \vee B) \vee C)$: associativité de $\vee$ ($\wedge$ est aussi associatif),
2. $(A \wedge (B \vee C)) \iff ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$: distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$,
3. $(A \vee (B \wedge C)) \iff ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$: distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$,
4. $(A \wedge (A \vee B)) \iff A$: première loi d'absorption,
5. $((A \vee (A \wedge B)) \iff A$ seconde loi d'absorption,
6. $(\neg(A \vee B)) \iff (\neg A \wedge \neg B)$: loi de Morgan,
7. $(\neg(A \wedge B)) \iff (\neg A \vee \neg B)$: loi de Morgan,
8. $(A \implies B) \iff (\neg A) \vee B$ (une définition de l'implication),
9. $\neg(A \implies B) \iff A \wedge (\neg B)$,
10. $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$: contraposition.
11. $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$ (règle du modus ponens).

Il faut savoir le démontrer.