

Feuille d'exercices 2.

Corrigé de quelques exercices.

Exercice 2.10 :

$$\int \cos^4 t \sin^3 t dt = \int -\frac{d(\cos t)}{dt} \cos^4 t (1 - \cos^2 t) dt = \int (x^2 - 1)x^4 dx,$$

en posant $x = \cos t$, ce qui est possible car $\cos$ est une application C^1 . Ainsi

$$\int \cos^4 t \sin^3 t dt = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + k = \frac{\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^5 t}{5} + k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.11 :

$$\begin{aligned} \cos^4 t \sin^2 t &= -\frac{1}{2^6}(e^{4it} + e^{-4it} + 4e^{2it} + 4e^{-2it} + 6)(e^{2it} - 2 + e^{-2it}) \\ &= -\frac{1}{2^5}(\cos(6t) + 2\cos(4t) - \cos(2t) - 2), \end{aligned}$$

donc

$$\int \cos^4 t \sin^2 t dt = \frac{t}{16} + \frac{\sin(2t)}{64} - \frac{\sin(4t)}{64} - \frac{\sin(6t)}{192} + k.$$

Exercice 2.19 :

◇ f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si l'on pose $u(x) = \sqrt{x} + 1$, $f(x) = 2u'(x)\sqrt{u(x)}$, donc $\int f(x)dx = \frac{4}{3}(u(x))^{\frac{3}{2}} + k = \frac{4}{3}(\sqrt{x} + 1)^{\frac{3}{2}} + k, x \in \mathbb{R}_+^*$.

◇ g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on pose $u(x) = 2 + \sin x$, $g(x) = u'(x)[u(x)]^{-\frac{1}{2}}$, donc $\int g(x)dx = 2[u(x)]^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2 + \sin x} + k$.

◇ h est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si l'on pose $u(x) = \ln x$, alors $h(x) = u'(x)u^2(x)$, donc $\int h(x)dx = \frac{1}{3}u^3(x) + k = \frac{1}{3}\ln^3(x) + k$.

◇ i est définie et continue sur $]1, +\infty[\setminus \{e\}$. On recherche donc les primitives de i sur $]1, e[$ ou bien sur $]e, +\infty[$. Si l'on pose $u(x) = \ln(\ln x)$, $u'(x) = \frac{1}{x \ln x}$, donc $i(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, puis $\int i(x)dx = \ln |u(x)| + k = \ln |\ln(\ln x)| + k$.

-
- $\diamond$ j est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si l'on pose $u(x) = \sqrt{x} + 1$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $j(x) = 2\frac{u'(x)}{u(x)}$ puis $\int j(x)dx = 2\ln(1 + \sqrt{x}) + k$.
- $\diamond$ k est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on pose $u(x) = \operatorname{ch} x$, alors $k(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc $\int k(x)dx = \ln(\operatorname{ch} x) + c$.
- $\diamond$ ℓ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\ell(x) = x\frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{1 + x^2}$, donc $\int \ell(x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + k$.
- $\diamond$ m est définie et continue sur $[1, +\infty[$. $m(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$, donc $\int m(x)dx = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}) + k$.
- $\diamond$ n est définie et continue sur tout sous-intervalle I de $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. $n(x) = (1 + \tan^2 x) - 1$, donc $\int n(x)dx = \tan x - x + k$.
- $\diamond$ p est définie et continue sur tout sous-intervalle I de $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. $p(x) = 1 + \tan^2 x + 2\tan x$, donc $\int p(x)dx = \tan x - 2\ln|\cos x| + k$.

Exercice 2.21 :

[Si la recherche de la limite de $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pertinente, c'est sans doute que la limite de I_n est nulle.]

- $\diamond$ $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \tan(1)dx = \frac{\tan(1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\boxed{I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.
- $\diamond$ [L'intégration par parties permet de remplacer l'intégrale en x^n par une intégrale en $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ qui est négligeable devant la première.]
- Intégrons par parties : $I_n = [\frac{x^{n+1}}{n+1} \tan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} (1 + \tan^2(x))dx$, donc $(n+1)I_n = \tan(1) - \int_0^1 x^{n+1} (1 + \tan^2(x))dx$.
- Mais $0 \leq \int_0^1 x^{n+1} (1 + \tan^2(x))dx \leq \int_0^1 x^{n+1} (1 + \tan^2(1))dx = \frac{1 + \tan^2(1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $(n+1)I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tan(1)$, or $nI_n = (n+1)I_n - I_n$ et $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\boxed{nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tan(1)}$.

Exercice 2.23 :

la fonction $x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ étant paire, on peut imposer $x > 0$ pour calculer la limite.

Soit $x > 0$. la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ étant continue sur le compact $[x, 3x]$, il existe $c_x, d_x \in [x, 3x]$ tels que, pour tout $t \in [x, 3x]$, $f(c_x) \leq f(t) \leq f(d_x)$.

La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t}$ étant positive sur $[x, 3x]$, on a

$$f(c_x) \int_x^{3x} g(t) dt \leq \int_x^{3x} f(t) g(t) dt \leq f(d_x) \int_x^{3x} g(t) dt.$$

Ici, $\int_x^{3x} g(t) dt = \ln 3$ et par composition des limites, $f(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $f(d_x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, donc

d'après le principe des gendarmes, $\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 3$.

Exercice 2.24 :

$$1^\circ) \text{ Avec } u = \frac{x}{2}, I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2u}{\sin(2u)} 2du = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} u \frac{1}{\sin u \cos u} du = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} u \frac{1}{\tan u \cos^2 u} du.$$

Ainsi, $I = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} u \frac{d}{du}(\tan u) \frac{1}{\tan u} du$, donc si l'on pose maintenant $t = \tan u$ (tan est

bien de classe C^1), $I = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \arctan t \frac{dt}{t}$.

$$2^\circ) \text{ En posant } x = \frac{1}{t}, K = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{dx}{x^2}\right) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -K,$$

donc $K = 0$.

$$3^\circ) \text{ Par intégration par parties, } I = \left[2 \arctan t \ln t \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \text{ donc d'après}$$

la question précédente, $I = 2 \frac{\pi}{3} \ln \sqrt{3} + 2 \frac{\pi}{6} \ln \sqrt{3} = \frac{\pi}{2} \ln 3$.

Exercice 2.25 :

1°) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité à montrer est évidente. Supposons maintenant que $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $x = a^p$ et $y = b^q$. Alors, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y$ (se déduit de la concavité du logarithme), donc $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.

2°) Soit $p, q \in]1, +\infty[^2$.

Supposons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, en prenant $b = a^{\frac{p}{q}}$, on obtient que $\frac{ab}{a^p + b^q} = \frac{a^{1+\frac{p}{q}}}{2a^p} = \frac{1}{2} a^{p(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1)}$, or $p(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1) > 0$, donc $\frac{ab}{a^p + b^q} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$ et l'ensemble de l'énoncé n'est pas majoré.

De même, lorsque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, $p(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1) < 0$, donc toujours avec $b = a^{\frac{p}{q}}$,

$\frac{ab}{a^p + b^q} \xrightarrow{a \rightarrow 0} +\infty$ et l'ensemble de l'énoncé n'est toujours pas majoré.

Supposons maintenant que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors d'après la première question,

$\frac{ab}{a^p + b^q} \leq \frac{ab}{\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}} \leq 1$, donc l'ensemble de l'énoncé est majoré par 1 et minoré par 0, donc il est borné.

En conclusion, l'ensemble est borné si et seulement si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 2.28 :

f étant continue, on peut poser $F(t) = \int_0^t f(u)du$. F est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et l'inégalité de l'énoncé s'écrit : $F'(x) \leq kF(x)$, pour tout $x > 0$.

F et F' étant continue en 0, $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0)$ et $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0)$, or les inégalités (au sens large) sont stables par passage à la limite, donc $F'(0) \leq kF(0)$, si bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) \leq kF(x)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, posons $g(t) = F(t)e^{-kt}$. g est aussi de classe C^1 et $g'(t) = e^{-kt}(F'(t) - kF(t))$, donc pour tout $t \geq 0$, $g'(t) \leq 0$.

Ainsi, g est décroissante, or $g(0) = 0$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) \leq 0$.

Mais par hypothèse, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$F(x) = \int_0^x f(u)du \geq 0$, puis $g(x) \geq 0$. Ainsi g est identiquement nulle, donc F est identiquement nulle, puis $f = F' = 0$.

Exercice 2.30 :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} t^{i+j-1} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t^i \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt,$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} (1 - (-t)^n)^2 dt.$$

$$\text{Posons } u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2} dt : \text{ on a } |u_n| \leq \int_0^1 t^n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} = \int_0^1 \frac{t dt}{(1+t)^2} + 2(-1)^{n+1} u_{n+1} + u_{2n+1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt = [\ln(1+t) + \frac{1}{1+t}]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.31 :

1°) [Si f est strictement positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right) \geq \left(\int_a^b 1 dt \right)^2.]$$

Soit $f \in F$. f est continue et elle ne s'annule en aucun réel de $[a, b]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f conserve un signe constant sur $[a, b]$. Ainsi, il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = \varepsilon|f(x)|$.

$$P_f = \left(\int_a^b \varepsilon|f(t)| dt \right) \left(\int_a^b \frac{dt}{\varepsilon|f(t)|} \right) = P_{|f|}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b 1 dt \right)^2 = \left(\int_a^b \frac{\sqrt{|f(t)|}}{\sqrt{|f(t)|}} dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)| dt \right) \left(\int_a^b \frac{dt}{|f(t)|} \right) = P_{|f|},$$

et il y a égalité si et seulement si les applications $t \mapsto \sqrt{|f(t)|}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{|f(t)|}}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| = \lambda$.

Ceci prouve que $\min_{f \in F} P_f$ existe, qu'il est égal à $(b-a)^2$, et que l'ensemble des éléments de F en lesquels ce minimum est atteint est l'ensemble des applications constantes non nulles.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons f_n l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par les conditions suivantes :

pour tout $t \in [a, a + \frac{b-a}{4}]$, $f_n(t) = \frac{1}{n}$, pour tout $t \in [a + \frac{3}{4}(b-a), b]$, $f_n(t) = n$, et le graphe de f_n sur $[a + \frac{b-a}{4}, a + \frac{3}{4}(b-a)]$ est un segment de droite joignant le point de coordonnées $(a + \frac{b-a}{4}, \frac{1}{n})$ au point de coordonnées $(a + \frac{3}{4}(b-a), n)$.

f_n ne s'annule en aucun point de $[a, b]$ et elle est continue, donc $f_n \in F$.

$$\int_a^b f_n(t) dt \geq \int_{a+\frac{3}{4}(b-a)}^b n dt = n \frac{b-a}{4} \text{ et } \int_a^b \frac{dt}{f_n(t)} \geq \int_a^{a+\frac{b-a}{4}} \frac{dt}{f_n(t)} = n \frac{b-a}{4},$$

dont $P_{f_n} \geq \left(\frac{n(b-a)}{4} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, or $\{P_f/f \in F\}$ contient $\{P_{f_n}/n \in \mathbb{N}^*\}$, donc il n'est pas majoré.