

Feuille d'exercices 3.

Ensembles et logique.

Théorie des ensembles

Exercice 3.1 : (niveau 1)

Soient E un ensemble et A, B, D trois parties de E . Démontrer que :

1. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$;
2. $A \setminus (B \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus D)$;
3. $A \setminus (B \cup D) = (A \setminus B) \cap (A \setminus D)$;
4. $(A \cup B) \cap (B \cup D) \cap (D \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap D) \cup (D \cap A)$.

Exercice 3.2 : (niveau 1)

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

- 1°) Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
- 2°) Démontrer qu'en général la première inclusion ci-dessus n'est pas une égalité.
- 3°) Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ si et seulement si, $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 3.3 : (niveau 1)

Soient A, B, C et D quatre ensembles.

- 1°) Démontrer que $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
- 2°) Comparer les ensembles $(A \times C) \cap (B \times D)$ et $(A \cap B) \times (C \cap D)$.

Exercice 3.4 : (niveau 1)

Soit A et B deux ensembles.

- 1°) Montrer que $A \Delta B = A \cap B$ si et seulement si $A = B = \emptyset$.
- 2°) Montrer que $A \Delta B = \emptyset$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 3.5 : (niveau 2)

Soient E un ensemble, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ une famille de parties de E . On pose

$$U = \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m A_{i,j} \quad \text{et} \quad V = \bigcap_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n A_{i,j}.$$

1°) Déterminer une inclusion liant U et V .

Démontrer qu'en général cette inclusion est stricte.

2°) On suppose que :

$$\forall i_1, i_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j_1, j_2 \in \llbracket 1, m \rrbracket, (i_1 \neq i_2) \implies (A_{i_1, j_1} \cap A_{i_2, j_2} = \emptyset).$$

Démontrer que $U = V$.

Exercice 3.6 : (niveau 2)

On considère un ensemble E et deux parties A et B de E .

1°) Résoudre l'équation suivante, en l'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $X \cup A = B$.

2°) En déduire les solutions de l'équation $X \cap A = B$.

3°) En déduire les solutions de l'équation $X \setminus A = B$.

Exercice 3.7 : (niveau 2)

On admet ici que, pour tout ensemble x , $x \notin x$.

1°) Soit b un ensemble. Résoudre l'équation $(E) : \{a\} \in \{a, b\}$.

2°) De même, résoudre les équations $a \subset \{a\}$ et $a \subset \{a, b\}$, où l'inconnue a est un ensemble.

Exercice 3.8 : (niveau 2)

Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E , on appelle différence symétrique de A et B la partie de E notée $A \Delta B$ définie par

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1°) Justifier l'égalité affirmée par la définition ci-dessus.

2°) Montrer que l'opération Δ est commutative et associative.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties de E .

Montrer que $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ si et seulement si le cardinal de $\{i \in \{1, \dots, n\} / x \in A_i\}$ est impair.

Exercice 3.9 : (niveau 3)

Si A est un ensemble muni d'une loi interne $*$, c'est-à-dire d'une application

$$A \times A \longrightarrow A$$

$(x, y) \longmapsto x * y$, on dit que $(A, *)$ est un monoïde si et seulement si

— $\forall x, y, z \in A, x * (y * z) = (x * y) * z$

— et s'il existe $e \in A$ tel que $\forall x \in A, x * e = e * x = x$. Dans ce cas, on dit que e est l'élément neutre de A .

On considère un monoïde $(G, *)$ dont l'élément neutre est noté e .

1°) Si H est une partie de G , à quelle condition H est-il un monoïde pour la restriction de “ $*$ ” à H , dont l'élément neutre est aussi e ? Dans ce cas, on dit que H est un sous-monoïde de G .

2°) Soit I un ensemble non vide quelconque et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-monoïdes de G . Montrer que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est aussi un sous-monoïde de G .

3°) Soit B une partie quelconque de G . Montrer qu'on peut définir le plus petit sous-monoïde de G contenant B , que l'on notera $M(B)$.

4°) Montrer que $M(B) = \{x_1 * \dots * x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in B\}$, en convenant que $x_1 * \dots * x_n = e$ lorsque $n = 0$.

Exercice 3.10 : (niveau 3)

On se place dans le cadre de la théorie des ensembles, pour laquelle tout objet mathématique est un ensemble.

1°) On admet l'axiome suivant :

Axiome de fondation : Pour tout ensemble x non vide, il existe $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il n'existe aucune suite d'ensembles $x_1, \dots, x_n$ tels que $x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1$.

2°) Posons $0 = \emptyset$.

Pour tout ensemble a , notons $s(a) = a \cup \{a\}$.

On dira qu'un ensemble a est clos par successeur si et seulement si $\forall x \in a, s(x) \in a$.

On admet l'*axiome de l'infini* : il existe un ensemble M dont 0 est un élément et qui est clos par successeur.

On note N l'intersection des parties de M contenant 0 et closes par successeur.

Montrer que N satisfait les axiomes de Peano que l'on rappelle :

- N est muni d'un élément particulier noté 0 et d'une application “successeur”, notée s de N dans N .
- 0 n'est le successeur d'aucun élément de N : $\forall n \in N, s(n) \neq 0$.
- s est une application injective : $\forall n, m \in N, s(n) = s(m) \implies n = m$.
- Pour toute partie F de N , si $0 \in F$ et $s(F) \subset F$ (i.e $\forall n \in N, n \in F \implies s(n) \in F$), alors $F = N$.

Exercice 3.11 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des ensembles.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note P_k l'ensemble des parties de cardinal k de $\{1, \dots, n\}$.

1°) Si $k \leq \frac{n+1}{2}$, montrer que $\bigcap_{H \in P_k} \bigcup_{i \in H} X_i \subset \bigcup_{H \in P_k} \bigcap_{i \in H} X_i$.

2°) Si $k \geq \frac{n+1}{2}$, montrer que $\bigcup_{H \in P_k} \bigcap_{i \in H} X_i \subset \bigcap_{H \in P_k} \bigcup_{i \in H} X_i$.

Logique**Exercice 3.12 :** (niveau 1)

Montrer de deux manières différentes que les formules propositionnelles suivantes sont des tautologies.

$$\neg A \implies (\neg B \iff (B \implies A)),$$

$$(A \implies B) \implies (((A \implies C) \implies B) \implies B).$$

Exercice 3.13 : (niveau 1)

Les lettres P et Q désignant des propriétés dépendant d'un paramètre x , compléter à l'aide des symboles $\iff$, $\implies$ et $\iff$, les propriétés mathématiques suivantes, afin qu'elles soient toujours vraies.

- $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \dots (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x)),$
- $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \dots (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x)),$
- $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \dots (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)),$
- $(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \dots (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x)).$

Exercice 3.14 : (niveau 1)

Montrer de deux manières différentes que les formules propositionnelles suivantes sont logiquement équivalentes :

$$A \implies (B \wedge C) \text{ et } (A \implies B) \wedge (A \implies C),$$

$$(A \vee B) \implies C \text{ et } (A \implies C) \wedge (B \implies C),$$

$$(A \wedge B) \implies C \text{ et } (A \implies B) \implies (A \implies C).$$

Exercice 3.15 : (niveau 1)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1°) Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$;
2. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée ;
3. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;
4. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante ;
5. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang) ;
6. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

2. Inversement, traduire en langage “clair” les assertions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p = 0$;
2. $\exists n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p < u_n$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p \neq u_n$.

Exercice 3.16 : (niveau 2)

Alice, Bruno et Camille sont au restaurant.

- Si Alice ne prend pas de dessert, Bruno non plus ;
- parmi Alice et Camille, exactement une personne prend un dessert ;
- si Camille prend un dessert, Bruno aussi ;
- Bruno ou Camille prennent un dessert.

Déterminer, parmi Alice, Bruno et Camille, ceux qui prennent un dessert.

Exercice 3.17 : (niveau 2)

Dans cet énoncé, la négation d’une formule propositionnelle P sera notée indifféremment $\neg P$ ou $\overline{P}$.

1°) La barre de Scheffer, notée “|”, est le connecteur logique défini par :

Pour toute formule propositionnelle P et Q , $(P|Q)$ est logiquement équivalente à $(\overline{P} \vee \overline{Q})$.

Montrer que l’on peut dire que la barre de Scheffer est le connecteur logique “est incompatible avec”.

2°) Exprimer les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, et $\implies$ en utilisant uniquement la barre de Scheffer.

Exercice 3.18 : (niveau 2)

Écrire les négations logiques des trois phrases suivantes :

1°) Dans chaque devoir surveillé, il y a toujours une question qu’aucun élève ne sait résoudre.

2°) Pour être admissible aux Mines en 2022, il suffisait d’avoir au moins 177 points à la barre scientifique et 363 points à la barre générale.

3°) L’an dernier en MPSI2, certains élèves ont eu au moins 12 à toutes leurs colles de maths.

Exercices supplémentaires

Théorie des ensembles

Exercice 3.19 : (niveau 1)

Considérons trois parties A , B et C d'un ensemble E telles que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrez que $B \subset C$. Dans quel cas a-t-on égalité?

Exercice 3.20 : (niveau 1)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Résoudre l'équation $(E) : (A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = \emptyset$, en l'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 3.21 : (niveau 1)

Soit E un ensemble, I un ensemble non vide, $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties de E telles que, pour tout $i \in I$, $E = A_i \cup B_i$.

Montrer que $E = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$.

Exercice 3.22 : (niveau 1)

On dit qu'un ensemble E est transitif si et seulement si $\forall x \in E, x \subset E$.

1°) Si E est transitif, montrer que $E \cup \{E\}$ est aussi transitif.

2°) Si E est transitif, montrer que $\mathcal{P}(E)$ est aussi transitif.

Exercice 3.23 : (niveau 2)

k désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, \dots, A_k$ sont k parties d'un même ensemble. Montrer que

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_{k-1} \setminus A_k) \cup (A_k \setminus A_1) \cup (A_1 \cap \dots \cap A_k).$$

Exercice 3.24 : (niveau 2)

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini. Montrer qu'on peut lister les éléments de $\mathcal{P}(E)$ de sorte que la liste commence par $\emptyset$, se termine par $\{x_n\}$ et que chaque nouveau terme de la liste est obtenu depuis le précédent par ajout ou retrait d'un unique élément de E .

Exercice 3.25 : (niveau 2)

Soit X un ensemble. On dit que $\mathcal{R}$ est un anneau de X si et seulement si $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ et si, pour tout $A, B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$ et $A \cup B \in \mathcal{R}$.

Montrer que si $\mathcal{R}$ est un anneau de X , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$, $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{R}$ et $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{R}$.

Exercice 3.26 : (niveau 2)

Soient E un ensemble, n un entier non nul, $A_1, \dots, A_n$ et $B_1, \dots, B_n$ des parties de E .

Montrer que $\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_i) = \bigcap_{X \subset \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \notin X} B_i \right) \right)$.

Exercice 3.27 : (niveau 2)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des ensembles distincts deux à deux. Démontrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

Exercice 3.28 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une famille de $n+1$ parties non vides de $\{1, \dots, n\}$.

Montrer qu'il existe deux sous-ensembles I et J de $\{1, \dots, n+1\}$, non vides et disjoints, tels que $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} X_j$.

Exercice 3.29 : (niveau 3)

Soit E un ensemble, $a \in E$ et f une application de E dans E .

Pour valider le principe de construction d'une suite par récurrence, on souhaite montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) Montrer l'unicité.

2°) On note A l'ensemble des parties u de $\mathbb{N} \times E$ telles que

- $(0, a) \in u$ et
- $\forall (n, x) \in u, (n+1, f(x)) \in u$.

Montrer que l'on peut définir $v = \bigcap_{u \in A} u$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x \in E$ tel que $(n, x) \in v$.

Conclure.

3°) Les suites récurrentes sont souvent construites selon une méthode plus complexe que précédemment : on considère toujours un ensemble E et un élément a de E mais on part maintenant d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application de E^{n+1} dans E .

Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_n(u_0, \dots, u_n)$.

4°) Il est fréquent que la fonction f_n de la question précédente ne soit pas unique : on considère toujours un ensemble E et un élément a de E mais on part maintenant d'une suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est une application de E^{n+1} dans $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.

En supposant l'axiome du choix, montrer qu'il existe au moins une suite (u_n) d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in F_n(u_0, \dots, u_n)$.

On pourra pour cela utiliser le théorème de Zermelo selon lequel l'axiome du choix est équivalent au fait que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Logique

Exercice 3.30 : (niveau 1)

Soient E un ensemble et A, B, C, D quatre parties de E . Démontrer que :

1. $(A \cap B = A \cup B) \iff A = B$;
2. $((A \cap B \subset A \cap C) \wedge (A \cup B \subset A \cup C)) \implies (B \subset C)$;
3. $((A \cup B = A \cap C) \wedge (B \cup C = B \cap A) \wedge (C \cup A = C \cap B)) \implies (A = B = C)$;
4. $((A \subset C) \wedge (B \subset D) \wedge (C \cap D = \emptyset) \wedge (A \cup B = C \cup D)) \implies ((A = C) \wedge (B = D))$.

Exercice 3.31 : (niveau 1)

Donner (en justifiant) la valeur booléenne de l'assertion

$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$, ainsi que de toutes celles que l'on peut obtenir en permutant l'ordre des sous-formules " $\exists x$ ", " $\forall y$ " et " $\forall z$ ".

Exercice 3.32 : (niveau 1)

Soient P, Q, R trois assertions.

- 1°) Démontrer que $(P \implies Q) \implies ((R \implies P) \implies (R \implies Q))$.
- 2°) Les assertions $P \implies (Q \implies R)$ et $(P \implies Q) \implies R$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3.33 : (niveau 2)

Soient E un ensemble, A une partie de E^2 et B une partie de E .

Nier les assertions suivantes :

$\forall x \in E, \exists y \in E, ((x, y) \in A \implies x \in B)$ et

$\forall x \in E, (\exists y \in E, (x, y) \in A) \implies (x \in B)$.

Expliquer ces deux assertions ainsi que leurs négations.

Exercice 3.34 : (niveau 2)

Donner la contraposée des expressions suivantes :

1. $(A \wedge (B \vee C)) \implies (B \vee (A \wedge C))$.
2. $(\exists! x, (x \in A \text{ et } x \in B)) \implies (\forall y, \exists! x, (x \in A \text{ et } (y - x) \in B))$.

Ces propositions sont-elles vraies ?

Exercice 3.35 : (niveau 3)

Cet exercice donne un aperçu de la démonstration d'un des théorèmes d'incomplétude de Gödel : "Pour toute théorie mathématique T , non contradictoire et contenant la théorie des entiers naturels, il existe une assertion, énonçable dans le cadre de la théorie T , qui est vraie mais qui n'est pas démontrable dans le cadre de la théorie T ".

Supposons que l'on a numéroté toutes les assertions (vraies ou fausses) énonçables dans le cadre de la théorie T : $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. On se limite donc au cas où l'ensemble des assertions énonçables dans le cadre de la théorie T est dénombrable. Ce n'est pas très restrictif, car si l'alphabet utilisé pour écrire ces énoncés est fini, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'ensemble des énoncés formant une phrase de longueur inférieure à ℓ est fini, donc l'ensemble de tous les énoncés est bien dénombrable.

Supposons par ailleurs que l'on a numéroté certaines parties de $\mathbb{N}$, appelées parties répertoriées et notées $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$.

On dit que n est remarquable lorsque $n \in P_n$. T contient la théorie des entiers, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété " $n \in P_n$ " est un énoncé de T : ainsi, il existe m tel que A_m est l'assertion " n est remarquable". On dira alors que m est le conjugué de n .

Pour conserver la simplicité de l'argument, nous éludons certaines difficultés, relatives au formalisme définissant ce qu'est une théorie T . De plus, nous admettons qu'il est possible de choisir les parties répertoriées de sorte que :

1. Les numéros des assertions démontrables dans le cadre de la théorie T forment une partie répertoriée.
2. Si X est une partie répertoriée, alors $\mathbb{N} \setminus X$ est aussi répertoriée.
3. Pour toute partie répertoriée X , il existe une partie répertoriée Y dont les éléments sont exactement les entiers dont le conjugué est dans X .

Considérons alors la partie X constituée des numéros des assertions non démontrables. C'est une partie répertoriée d'après (1) et (2). On peut donc lui associer, d'après (3), une partie répertoriée Y dont les éléments sont les entiers dont le conjugué est dans X . On note n le numéro de Y (de sorte que $Y = P_n$) et l'on désigne par m le conjugué de n (de sorte que A_m est l'assertion : " n est remarquable").

1°) Démontrer que n est remarquable. *Raisonner par l'absurde et utiliser le fait que T n'est pas contradictoire, c'est-à-dire que toutes les assertions démontrables dans le cadre de la théorie T sont vraies.*

2°) En déduire que A_m est une assertion vraie mais non démontrable dans le cadre de la théorie T .