

Feuille d'exercices 3.

Corrigé de quelques exercices.

Théorie des ensembles

Exercice 3.6 :

1°) Si X est solution $A \subset A \cup X \subset B$.

Si $A \not\subset B$, alors l'équation n'admet aucune solution.

Supposons maintenant que $A \subset B$.

Alors $X \cup A = B \iff B \setminus A \subset X \subset B$.

2°) On va se ramener à la première question :

$X \cap A = B \iff \overline{B} = \overline{X} \cup \overline{A}$.

Si $\overline{A} \not\subset \overline{B}$, i.e $B \not\subset A$, l'équation n'a pas de solution.

Si $B \subset A$, $X \cap A = B \iff \overline{B} \setminus \overline{A} \subset \overline{X} \subset \overline{B}$, or $\overline{B} \setminus \overline{A} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \overline{B} \cap A$, donc

$X \cap A = B \iff B \subset X \subset B \cup \overline{A}$.

3°) $X \setminus A = X \cap \overline{A}$, donc on est ramené à la question précédente.

Si $B \not\subset \overline{A}$ (i.e $A \cap B \neq \emptyset$) alors l'équation n'a pas de solution.

Si $A \cap B = \emptyset$, $X \setminus A = B \iff B \subset X \subset B \cup A$.

Exercice 3.7 :

1°) $\{a\} \in \{a, b\} \iff [\{a\} = a \text{ ou } \{a\} = b]$, mais si $a = \{a\}$, sachant que $a \in \{a\}$, $a \in a$, ce qui est faux, donc $\{a\} \in \{a, b\} \iff \{a\} = b$.

Lorsque b n'est pas un singleton, (E) n'a donc aucune solution.

Lorsque b est le singleton $\{c\}$, alors c est l'unique solution de (E) .

Ainsi, en général, $\{a\} \notin \{a, b\}$, alors que $a \in \{a, b\}$ et $\{a\} \subset \{a, b\}$.

2°)

◇ $a \subset \{a\} \iff a \in \mathcal{P}(\{a\}) \iff a \in \{\emptyset, \{a\}\}$,

or $a = \{a\} \implies a \in a$ ce qui est faux, donc $a \subset \{a\} \iff a = \emptyset$.

Ainsi, en général, $a \not\subset \{a\}$, alors que $a \in \{a\}$.

◇ $a \subset \{a, b\} \iff a \in \mathcal{P}(\{a, b\}) \iff a \in \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,

or $a = \{a\} \implies a \in a$ et $a = \{a, b\} \implies a \in a$, ce qui est faux, donc

$a \subset \{a, b\} \iff (a = \emptyset) \vee (a = \{b\})$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est $\{\emptyset, \{b\}\}$.

Exercice 3.8 :

2°) Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

◇ *Première méthode : par table de vérité.*

On fixe $x \in E$. On construit un tableau de vérité, dont chacune des 8 lignes indique les 8 possibilités de valeurs de vérité des 3 assertions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$, puis les valeurs de vérité des assertions $x \in (A\Delta B)$, $x \in B\Delta C$, et enfin $x \in (A\Delta B)\Delta C$ et $x \in A\Delta(B\Delta C)$. On vérifie que les deux dernières colonnes du tableau sont identiques, ce qui prouve que $x \in (A\Delta B)\Delta C \iff x \in A\Delta(B\Delta C)$, donc que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$. Ceci démontre bien l'associativité.

◇ *Deuxième méthode : par calcul sur les ensembles.*

$$\begin{aligned} A\Delta(B\Delta C) &= A\Delta((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)), \text{ donc} \\ A\Delta(B\Delta C) &= [A \cap ((\overline{B} \cup C) \cap (B \cup \overline{C}))] \cup [\overline{A} \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C))] \\ &= [A \cap ((\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C))] \cup [(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)] \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C). \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend pas de l'ordre de A, B, C , elle est symétrique en A, B, C , donc $A\Delta(B\Delta C) = C\Delta(A\Delta B) = (A\Delta B)\Delta C$, d'où l'associativité.

◇ *Troisième méthode : avec les fonctions indicatrices.*

Pour tout $D \subset E$, on appelle indicatrice de D , et on note 1_D , l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par : pour tout $x \in D$, $1_D(x) = 1$ et pour tout $x \in E \setminus D$, $1_D(x) = 0$.

On sait ou on redémontre que, $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$ et $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$, donc $1_{A\Delta B} = 1_{A \cap \overline{B}} + 1_{\overline{A} \cap B} = 1_A(1 - 1_B) + 1_B(1 - 1_A) = 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A \cdot 1_B$.

Alors, $1_{A\Delta(B\Delta C)} = 1_A + 1_{B\Delta C} - 2 \cdot 1_A \cdot 1_{B\Delta C}$, puis

$$\begin{aligned} 1_{A\Delta(B\Delta C)} &= 1_A + (1_B + 1_C - 2 \cdot 1_B \cdot 1_C) - 2 \cdot 1_A \cdot (1_B + 1_C - 2 \cdot 1_B \cdot 1_C), \\ \text{donc } 1_{A\Delta(B\Delta C)} &= 1_A + 1_B + 1_C - 2(1_A \cdot 1_B + 1_B \cdot 1_C + 1_C \cdot 1_A) + 4 \cdot 1_A \cdot 1_B \cdot 1_C. \end{aligned}$$

Dans cette expression, l'ordre de A, B, C n'importe pas (elle est symétrique en (A, B, C)), donc on peut conclure comme lors de la seconde méthode.

◇ *Dernière méthode : mais c'est bien sûr !*

On reprend la troisième méthode, mais on raisonne modulo 2 :

Pour tout $x \in E$, on vérifie que $1_{A\Delta B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 2 \cdot 1_A(x) \cdot 1_B(x)$, par exemple en étudiant les 4 cas selon que x est ou non dans A ou dans B . Ainsi, modulo 2, pour tout $x \in E$, $1_{A\Delta B}(x) \equiv 1_A(x) + 1_B(x) \pmod{2}$.

Soit $x \in E$. On en déduit que $1_{A\Delta(B\Delta C)}(x) \equiv 1_A(x) + 1_B(x) + 1_C(x) \pmod{2}$, donc que $x \in A\Delta(B\Delta C)$ si et seulement si $1_A(x) + 1_B(x) + 1_C(x)$ est impair. Cette dernière condition ne dépend pas de l'ordre de A, B, C , donc on peut conclure comme lors de la seconde méthode.

3°) Δ étant associative, d'après le cours (à venir ...), la quantité $A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_n$ ne dépend pas de la façon dont elle est parenthésée.

Soit $x \in E$. En utilisant la dernière méthode de la question précédente, on montre par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $1_{A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_k}(x) \equiv \sum_{i=1}^k 1_{A_i}(x) \pmod{2}$, donc

$x \in A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_n$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)$ est impaire. Or chaque terme de cette

somme vaut 0 ou 1, donc cette somme est égale au nombre de ses termes égaux à 1, c'est-à-dire au nombre de $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in A_i$. On a bien montré que $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ si et seulement si le cardinal de $\{i \in \{1, \dots, n\} / x \in A_i\}$ est impair.

Exercice 3.9 :

1°) Supposons que H est solution. Alors nécessairement, pour tout $x, y \in H$, on a $x * y \in H$ et $e \in H$.

Réciproquement, si $e \in H$ et si pour tout $x, y \in H$, on a $x * y \in H$, alors la loi $*$ est correctement définie sur H et on a clairement :

- $\forall x, y, z \in H, x * (y * z) = (x * y) * z$
- et $\forall x \in H, x * e = e * x = x$,

donc $(H, *)$ satisfait les conditions attendues.

2°) Pour tout $i \in I$, H_i est un sous-monoïde, donc $e \in H_i$. Ainsi, $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

Soit $x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Soit $i \in I$. Alors $x, y \in H_i$, or H_i est un sous-monoïde, donc $x * y \in H_i$,

pour tout $i \in I$. Ceci montre que $x * y \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

En conclusion, on a montré que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-monoïde.

De la même façon, lorsque $\mathcal{M}$ est un ensemble non vide de sous-monoïdes de G , on montre que $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ est un sous-monoïde de G .

3°) Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-monoïdes de G contenant B . $G \in \mathcal{M}$, donc $\mathcal{M}$ est non vide. On peut donc poser $H = \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X$.

D'après la seconde question, H est un sous-monoïde et par construction, il contient B . En effet, si $x \in B$, pour tout $X \in \mathcal{M}$, $x \in B \subset X$, donc $x \in X$, ce qui prouve bien que $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X = H$.

De plus, si Y est un sous-monoïde contenant B , alors $Y \in \mathcal{M}$, donc $H = \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X \subset Y$.

Ainsi, au sens de l'inclusion, H est bien le plus petit sous-monoïde de G contenant B . On dit que c'est le sous-monoïde de G engendré par B .

4°) D'après la convention de l'énoncé, $e \in M(B)$.

Soit $x, y \in M(B)$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_{n+m} \in B$ tels que $x = x_1 * \cdots * x_n$ et $y = x_{n+1} * \cdots * x_{n+m}$, donc par associativité, $x * y = x_1 * \cdots * x_{n+m}$, ce qui prouve que $x * y \in M(B)$.

On a prouvé que $M(B)$ est un sous-monoïde de G .

Il est clair que pour tout $x_1 \in B$, $x_1 \in M(B)$, donc $B \subset M(B)$.

Soit maintenant N un sous-monoïde de G contenant B .

Par récurrence sur n , on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x_1, \dots, x_n \in B$, $x_1 * \dots * x_n \in N$, car $e \in N$ (ce qui prouve la propriété pour $n = 0$) et car N est stable par $*$. Ainsi, $M(B) \subset N$.

On a donc prouvé que $M(B)$ est le plus petit sous-monoïde de G contenant B .

Remarque : La question 4 fournit une seconde preuve pour la question 3.

Exercice 3.10 :

1°) On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et n ensembles $x_1, \dots, x_n$ tels que $x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1$.

Posons $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit $y \in x$. Il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $y = x_i$. Alors, en convenant que $x_0 = x_n$, on a $x_{i-1} \in x_i = y$, donc $x_{i-1} \in y \cap x$ ce qui prouve que $y \cap x \neq \emptyset$, pour tout $y \in x$. Or x est non vide, donc ceci contredit l'axiome de fondation, ce qui permet de conclure.

Remarque : On peut aller un peu plus loin pour comprendre ce que signifie l'axiome de fondation : s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$, alors en posant $x = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, on montre que pour tout $y \in x$, $y \cap x \neq \emptyset$, donc l'axiome de fondation est faux.

Réciproquement, si l'on suppose faux l'axiome de fondation, il existe un ensemble x non vide tel que, pour tout $y \in x$, $y \cap x \neq \emptyset$.

x étant non vide, il existe $x_0 \in x$. Alors $x_0 \cap x \neq \emptyset$, donc il existe $x_1 \in x_0 \cap x$.

$x_1 \in x$, donc il existe $x_2 \in x_1 \cap x$.

À l'aide du principe de récurrence, on en déduit l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$.

Ainsi l'axiome de fondation équivaut à l'inexistence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles qui est "décroissante" pour la relation d'appartenance. C'est pourquoi cet axiome s'appelle l'axiome de "fondation", par analogie avec le fait qu'un ordre est dit bien fondé si et seulement si il n'admet aucune suite infinie strictement décroissante.

2°) Notons $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{P}(M) / (0 \in A) \wedge (s(A) \subset A)\}$: $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties de M contenant 0 et closes par successeur. L'énoncé propose de poser $N = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$.

M contient 0 et M est clos par successeur, donc $\mathcal{N} \neq \emptyset$, donc l'intersection précédente est bien définie et l'égalité $N = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$ définit bien l'ensemble N . Montrons qu'il vérifie les axiomes de Peano.

— Pour tout $A \in \mathcal{N}$, $0 \in A$, donc $0 \in N$.

Pour tout $x \in N$, x est un ensemble donc $s(x)$ est défini.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. $s(n) = n \cup \{n\}$, donc $n \in s(n)$, donc $s(n) \neq \emptyset$. Ainsi, $s(n) \neq 0$.

— Soit F une partie de N telle que $0 \in F$ et $s(F) \subset F$. Alors $F \in \mathcal{N}$, or $N = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$,

donc $N \subset F$. Or $F \subset N$, donc $F = N$.

— Soit $n, m \in N$ tels que $s(n) = s(m)$. Supposons que $n \neq m$.

$n \in \{n\} \subset \{n\} \cup n = s(n)$, donc $n \in s(m) = m \cup \{m\}$, mais $n \neq m$, donc $n \in m$.

De même, on montre que $m \in n$, donc $n \in m \in n$, or c'est impossible d'après la première question. On en déduit que $n = m$, ce qui conclut.

Exercice 3.11 :

Notons E la réunion des ensembles $X_1, \dots, X_n$. Soit $x \in E$.

Posons $N(x) = \{i \in \mathbb{N}_n / x \in X_i\}$ et notons $n(x)$ le cardinal de $N(x)$, c'est-à-dire le nombre de $i \in \mathbb{N}_n$ tels que X_i contient x .

Posons également $A = \bigcap_{H \in P_k} \bigcup_{i \in H} X_i$ et $B = \bigcup_{H \in P_k} \bigcap_{i \in H} X_i$.

$$\begin{aligned} x \in B &\iff \exists H \in P_k, \forall i \in H, x \in X_i \\ &\iff \exists H \in P_k, H \subset N(x) \\ &\iff n(x) \geq k. \end{aligned}$$

En effet, $N(x)$ contient une partie H de cardinal k si et seulement si son cardinal $n(x)$ est supérieur à k . Ainsi, le critère d'appartenance à B est simple.

Mais d'après les règles de Morgan, $\bar{A} = \bigcup_{H \in P_k} \bigcap_{i \in H} \bar{X}_i$, donc en remplaçant X_i par $\bar{X}_i$

dans ce qui précède, on obtient que $x \in A \iff m(x) \geq k$,

où $m(x)$ est le cardinal de $M(x) = \{i \in \mathbb{N}_n / x \in \bar{X}_i\}$.

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $i \in M(x) \iff \neg(x \in X_i) \iff i \notin N(x)$, donc $M(x) = \mathbb{N}_n \setminus N(x)$, puis $m(x) = n - n(x)$. Ainsi, $x \in \bar{A} \iff n - n(x) \geq k \iff n(x) \leq n - k$. Finalement, le critère d'appartenance à A est également simple :

$$x \in A \iff n(x) > n - k \iff n(x) \geq n - k + 1.$$

1°) Supposons que $k \leq \frac{n+1}{2}$. Alors $2k \leq n + 1$, donc $n - k + 1 \geq k$. Alors pour tout $x \in E$, $x \in A \iff n(x) \geq n - k + 1 \implies n(x) \geq k \implies x \in B$, donc $A \subset B$.

2°) De même, lorsque $k \geq \frac{n+1}{2}$, $n - k + 1 \leq k$ et on en déduit que $B \subset A$.

Logique

Exercice 3.12 :

On dispose même de trois manières de démontrer que ces formules propositionnelles sont des tautologies.

◇ Une première méthode que l'on ne développera pas consiste à contruire des tables de vérité.

◇ Une seconde méthode consiste à raisonner comme on en a l'habitude :

Supposons que $\neg A$ et montrons que $\neg B \iff (B \implies A)$.

Pour cela, supposons d'abord $\neg B$. Alors B est fausse, donc $B \implies A$ est vraie. Ainsi, on a montré que $\neg B \implies (B \implies A)$.

Pour établir l'implication réciproque, supposons que $B \implies A$. Par hypothèse, A est fausse, or $B \implies A$, donc B est fausse par contraposée.

Ceci démontre que $(B \implies A) \implies \neg B$.

Ainsi, on a prouvé que $\neg A \implies (\neg B \iff (B \implies A))$.

Pour la seconde formule propositionnelle, supposons que $A \implies B$.

Supposons que $(A \implies C) \implies B$.

Si A est vraie, alors on a B .

Si A est fausse, alors $A \implies C$ est vraie, donc on a aussi B .

Dans tous les cas, B est vraie, donc on a montré que $((A \implies C) \implies B) \implies B$, sous l'hypothèse que $A \implies B$.

On a bien montré que $(A \implies B) \implies (((A \implies C) \implies B) \implies B)$.

◇ Troisième méthode par succession d'équivalences logiques.

$$\begin{aligned} [\neg A \implies (\neg B \iff (B \implies A))] &\equiv A \vee (\neg B \iff (B \implies A)) \\ &\equiv A \vee [(\neg B \implies (B \implies A)) \wedge ((B \implies A) \implies \neg B)] \\ &\equiv A \vee [(B \vee (\neg B \vee A)) \wedge ((B \wedge \neg A) \vee \neg B)], \end{aligned}$$

Or $(B \vee (\neg B \vee A)) \equiv (B \vee \neg B) \vee A \equiv 1$, donc

$$[\neg A \implies (\neg B \iff (B \implies A))] \equiv [A \vee ((B \wedge \neg A) \vee \neg B)] \equiv (B \wedge \neg A) \vee \neg(B \wedge \neg A) \equiv 1,$$

donc $\neg A \implies (\neg B \iff (B \implies A))$ est bien une tautologie. De même,

en notant $P = (A \implies B) \implies (((A \implies C) \implies B) \implies B)$,

$$\begin{aligned} P &\equiv \neg(A \implies B) \vee [((A \implies C) \implies B) \implies B] \\ &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg((A \implies C) \implies B) \vee B) \\ &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (((A \implies C) \wedge \neg B) \vee B), \end{aligned}$$

or par distributivité,

$$(((A \implies C) \wedge \neg B) \vee B) \equiv ((A \implies C) \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \equiv ((A \implies C) \vee B), \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} P &\equiv (A \wedge \neg B) \vee ((A \implies C) \vee B) \\ &\equiv (A \wedge \neg B) \vee ((\neg A \vee C) \vee B) \\ &\equiv (A \vee \neg A \vee C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C \vee B) \\ &\equiv 1. \end{aligned}$$

Exercice 3.13 :

Dans l'ordre, il faut compléter par $\iff, \implies, \impliedby, \iff$.

Exercice 3.14 :

Non corrigé : similaire (en plus simple) à l'exercice 12.

Exercice 3.15 :

1°)

1. (u_n) est majorée par M si et seulement si
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;
2. (u_n) est majorée si et seulement si
 $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;
3. Il suffit de nier la phrase précédente, donc (u_n) n'est pas majorée si et seulement si : $\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$;
4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si
 $\forall n, m \in \mathbb{N}, (n < m \implies u_n > u_m)$;
5. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire si et seulement si
 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = u_{n+1}$;

-
6. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si
 $\exists T \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+T} = u_n$;

2°)

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p = 0$ signifie que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / u_n = 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non majorée, donc que c'est un ensemble de cardinal infini. Cette phrase signifie donc que la suite (u_n) possède une infinité de 0.
2. $\exists n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p < u_n$ est le contraire de la phrase
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, u_p \geq u_n$, donc signifie que la suite (u_n) n'est pas croissante.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, u_p \neq u_n$ signifie que la suite (u_n) n'est pas stationnaire.

Exercice 3.16 :

Notons A l'assertion "Alice prend un dessert". De même, notons B l'assertion "Bruno prend un dessert" et C l'assertion "Camille prend un dessert".

Les hypothèses de l'énoncé s'écrivent, en notant $\bar{A}$ la négation de A et en notant $\oplus$ le "ou exclusif" : $\bar{A} \implies \bar{B}$, $A \oplus C$, $C \implies B$ et $B \vee C$.

◇ Première méthode par table de vérité :

A	B	C	$\bar{A} \implies \bar{B}$	$A \oplus C$	$C \implies B$	$B \vee C$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0

Seule la deuxième ligne valide les 4 hypothèses, donc Alice et Bruno prennent un dessert, mais pas Camille.

◇ Par le raisonnement usuel :

$[\bar{A} \implies \bar{B}] \equiv (A \vee \bar{B})$ et $(C \implies B) \equiv (\bar{C} \vee B)$, donc les hypothèses sont : $A \vee \bar{B}$, $A \oplus C$, $\bar{C} \vee B$ et $B \vee C$.

Si B est faux, comme $\bar{C} \vee B$, on a $\bar{C}$. Alors $B \vee C$ est fausse, ce qui est en contradiction avec les hypothèses, donc B est vrai. Or $A \vee \bar{B}$, donc A est vrai, or $A \oplus C$, donc C est faux.

◇ Par équivalences logiques.

Par hypothèse, on a $P = (A \vee \bar{B}) \wedge (A \oplus C) \wedge (\bar{C} \vee B) \wedge (B \vee C)$.

$P \equiv (A \vee \bar{B}) \wedge ((A \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge C)) \wedge (\bar{C} \vee B) \wedge (B \vee C)$.

Or par factorisation de B , $[(\bar{C} \vee B) \wedge (B \vee C)] \equiv B \vee (C \wedge \bar{C}) \equiv B$, donc

$P \equiv B \wedge (A \vee \bar{B}) \wedge ((A \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge C))$, mais

par distributivité, $[B \wedge (A \vee \bar{B})] \equiv (B \wedge A) \vee (B \wedge \bar{B}) \equiv (B \wedge A)$, donc

$P \equiv B \wedge A \wedge ((A \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge C)) \equiv B \wedge A \wedge \bar{C}$.

Exercice 3.17 :

1°) Soit P et Q deux formules propositionnelles. On dit que P est incompatible avec Q si et seulement si P et Q ne sont pas vraies en même temps, donc si et seulement si $\neg(P \wedge Q)$, c'est-à-dire si et seulement si $(P \mid Q)$ d'après une loi de Morgan.

2°) On notera " $\equiv$ " l'équivalence logique : " $P \equiv Q$ " signifie donc que, pour toute distribution de valeurs de vérité, " $P \iff Q$ ".

◇ $(P \mid P) \equiv (\overline{P} \vee \overline{P}) \equiv \neg P$.

◇ $(\overline{P} \mid \overline{Q}) \equiv (P \vee Q)$, donc $(P \vee Q) \equiv ((P \mid P) \mid (Q \mid Q))$.

◇ $(P \wedge Q) \equiv \overline{\overline{P} \vee \overline{Q}}$, or $\neg$ et $\vee$ s'expriment uniquement en fonction de la barre de Scheffer, donc c'est encore le cas pour $\wedge$.

Plus précisément, $(P \wedge Q) \equiv \overline{(P \mid Q)} \equiv ((P \mid Q) \mid (P \mid Q))$,

◇ $(P \implies Q) \equiv \overline{P \wedge \overline{Q}}$ donc $\implies$ s'exprime uniquement en fonction de la barre de Scheffer. Plus précisément, $(P \implies Q) \equiv \overline{(P \wedge \overline{Q})} \equiv \overline{P} \vee \overline{\overline{Q}} \equiv (P \mid \overline{Q}) \equiv (P \mid (Q \mid Q))$.

Exercice 3.18 :

Pour chaque question, on écrit formellement la phrase de l'énoncé, on la nie "mécaniquement", puis on interprète cette négation.

1°) Notons DS l'ensemble des devoirs surveillés, chaque devoir étant considéré comme un ensemble de questions. Ainsi, la phrase "dans chaque devoir surveillé, il y a toujours une question qu'aucun élève ne sait résoudre" s'écrit

$\forall d \in DS, \exists q \in d, \forall e \in C, \neg(e R q)$, où C est la classe et où $e R q$ signifie que l'élève e sait résoudre la question q . La négation de cette phrase donne

$\exists d \in DS, \forall q \in d, \exists e \in C, e R q$. Elle signifie qu'il existe un devoir surveillé dont chaque question a été résolue par au moins élève.

2°) Notons BS la barre scientifique et BG la barre générale d'un candidat aux Mines en 2022 et A l'assertion affirmant que le candidat est admissible. La phrase "pour être admissible aux Mines en 2022, il suffisait d'avoir au moins 177 points à la barre scientifique et 363 points à la barre générale" s'écrit

$(BS \geq 177) \wedge (BG \geq 363) \implies A$. Sa négation s'écrit

$(BS \geq 177) \wedge (BG \geq 363) \wedge \neg A$, laquelle phrase signifie qu'un candidat peut avoir une barre scientifique supérieure à 177 et une barre générale supérieure à 363 sans être admissible.

3°) Notons $C(e)$ l'ensemble des colles de l'élève e et $c(e)$ la note de l'élève e lors de la colle c . La phrase "l'an dernier en MPSI2, certains élèves ont eu au moins 12 à toutes leurs colles de maths" s'écrit

$\exists e \in MPSI2, \forall c \in C(e), c(e) \geq 12$. La négation de cette phrase est

$\forall e \in MPSI2, \exists c \in C(e), c(e) < 12$, ce qui signifie que tous les élèves de MPSI2 ont vécu au moins une colle où leur note fut strictement inférieure à 12.