

Feuille d'exercices 4.

Corrigé de l'exercice 13.

Exercice 4.13 :

Existence :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion selon laquelle l'entier n admet une écriture factorielle.

Pour $n = 0$, on prend $p = 0$, en convenant qu'une somme vide est nulle.

Ceci montre $R(0)$.

Pour $n \geq 0$, on suppose $R(k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrons $R(n+1)$.

$\{m \in \mathbb{N}/m! \leq n+1\}$ est non vide et majoré par $n+1$, donc il admet un maximum noté p . Ainsi, $p! \leq n+1 < (p+1)!$.

Effectuons la division euclidienne de $n+1$ par $p!$:

il existe $x_p, h \in \mathbb{N}$ tels que $n+1 = p!x_p + h$ avec $0 \leq h < p!$.

Alors $p!x_p \leq n+1 < (p+1)!$, donc $x_p \leq p$.

De plus $h < p! \leq n+1$, donc $h \leq n$. On peut donc utiliser $R(h)$: il existe $q \in \mathbb{N}$,

$x_1, \dots, x_q \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$ et $x_q \neq 0$ (si $q \neq 0$) tels que $h = \sum_{k=1}^q k!x_k$.

$q! \leq q!x_q \leq h < p!$, donc $q < p$. Or $n+1 = h + p!x_p$, d'où $R(n+1)$.

On a donc montré l'existence.

Unicité :

Lemme :

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$, $\sum_{k=1}^p k!x_k \leq (p+1)! - 1$, avec égalité si et seulement si pour tout k , $x_k = k$.

Démonstration du lemme : $\sum_{k=1}^p k!x_k \leq \sum_{k=1}^p k!k = \sum_{k=1}^p k!(k+1-1) = \sum_{k=1}^p ((k+1)! - k!).$

La dernière somme est télescopique, donc $\sum_{k=1}^p k!x_k \leq (p+1)! - 1$. De plus, s'il existe

$k \in \mathbb{N}_p$ tel que $x_k < k$, alors cette inégalité est stricte. Réciproquement, lorsque pour

tout $k \in \mathbb{N}_p$, $x_k = k$, on a bien montré que $\sum_{k=1}^p k!x_k = \sum_{k=1}^p k!((k+1)-k) = (p+1)! - 1$.

Première méthode : Une démonstration directe :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n possède deux écritures factorielles :

$$n = \sum_{k=1}^p x_k k! = \sum_{h=1}^q h! y_h.$$

Si $q < p$, alors d'après le lemme, $n = \sum_{h=1}^q h! y_h < (q+1)! \leq p! \leq n$, ce qui est faux. On raisonne de même si $p < q$, donc $p = q$.

On peut écrire que $n = p! x_p + r$ avec $r = \sum_{k=1}^{p-1} x_k k!$. d'après le lemme, $0 \leq r < p!$, donc cette écriture est la division euclidienne de n par $p!$. Mais c'est aussi le cas de l'écriture

$$n = p! y_p + r' \text{ avec } r' = \sum_{k=1}^{p-1} y_k k!, \text{ donc d'après l'unicité de la division euclidienne, } x_p = y_p$$

et $\sum_{k=1}^{p-1} x_k k! = \sum_{k=1}^{p-1} y_k k!$. On conclut en inscrivant ce raisonnement dans une récurrence forte sur n .

Seconde méthode : Par un argument combinatoire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$A_n = \{(x_1, \dots, x_p) / 1 \leq p < n, \forall k \in \{1, \dots, p\}, 0 \leq x_k \leq k, x_p \neq 0\}$$

$$\varphi_n : A_n \longrightarrow \llbracket 1, n! - 1 \rrbracket$$

$$\text{et } (x_1, \dots, x_p) \longmapsto \sum_{k=1}^p k! x_k \quad .$$

φ_n est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n! - 1 \rrbracket$ d'après le lemme, elle est surjective d'après la démonstration de l'existence. L'unicité correspond à l'injectivité de φ_n , ce que l'on peut démontrer en prouvant que $\#A_n = \#\llbracket 1, n! - 1 \rrbracket = n! - 1$.

Or $\#A_n = \sum_{p=1}^{n-1} p! p = n! - 1$ d'après le cas d'égalité du lemme.